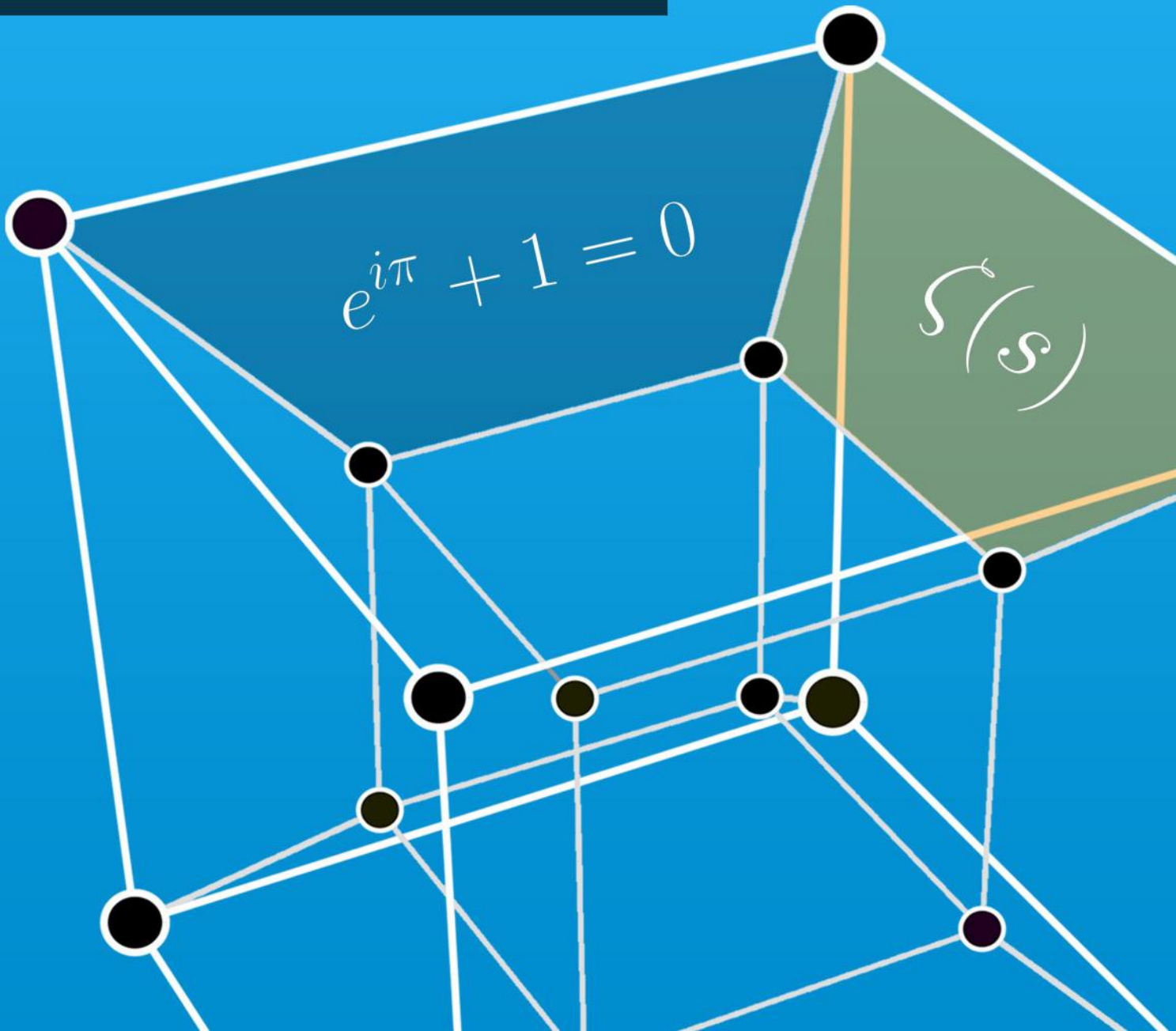


MW Wild Mathing

МАТЕМАТИКА



Содержание

НАПУТСТВИЕ	4
§1. ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ В МГУ	5
ДВИ – 2021	5
ДВИ – 2020	6
ДВИ – 2019	8
ДВИ – 2018	9
ДВИ – 2017	10
ДВИ – 2016	11
ДВИ – 2015	12
ДВИ – 2014	13
ДВИ – 2013	14
ДВИ – 2012	15
ДВИ – 2011	16
Дополнительно	17
§2. ОЛИМПИАДНЫЙ УГОЛОК	18
Олимпиада «Физтех»	18
Геометрия	19
Принцип Дирихле	22
Классические неравенства	22
Индукция	22
Тригонометрия	23
Неравенства о средних и тригонометрия	23
Арифметика и теория чисел	23
Комбинаторика и теория графов	24
Разные задачи	24
Геометрические интерпретации	24
Задачи с параметром	25
§3. ВАРИАНТЫ ЕГЭ. ЧАСТЬ «С»	26
Вариант I	26
Вариант II	27
Вариант III	28
Вариант IV	29
Вариант V	30
Вариант VI	31
§4. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ	32
§5. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ	34
Подготовительные задачи	34
Графический метод	34
Аналитические методы	35
§7. ПЛАНИМЕТРИЯ	37
§6. «ЭКОНОМИЧЕСКИЕ» ЗАДАЧИ	38
§8. НЕРАВЕНСТВА	41
§9. СТЕРЕОМЕТРИЯ	42
Подготовительные задачи	42
Задачи ЕГЭ	42
§10. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ	44
§11. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ	45

§12. ВАРИАНТЫ ЕГЭ. ЧАСТЬ «В»	47
Вариант I	47
Вариант II	48
Вариант III	49
Вариант IV	50
Вариант V	51
Вариант VI	52
Вариант VII	53
Вариант VIII	54
Вариант IX	55
Вариант X	56
§13. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ	57
§14. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА	58
§15. ПО СТОПАМ ЭЙЛЕРА	60
§16. ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ	61
§17. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ	62
§18. ПОЛЕЗНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ	63
§19. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	64
ДВИ – 2021	64
ДВИ – 2020	66
ДВИ – 2019	68
ДВИ – 2018	69
ДВИ – 2017	70
ДВИ – 2016	71
ДВИ – 2015	72
ДВИ – 2014	73
ДВИ – 2013	74
ДВИ – 2012	75
ДВИ – 2011	76
Ответы	77
§20. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ	79
Сведение к квадратным уравнениям	80
Группировка и разложение на множители	81
Сведение к однородным уравнениям	83
Работа с тригонометрическими неравенствами и ОДЗ	84
Решаем, тренируемся, получаем хороший балл	85
Отбор корней из данного промежутка	88
§21. СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ	91
Тригонометрия	91
Алгебра и арифметика	93
Начала анализа	95
Неравенства	95
Стереометрия	96
ГДЕ НАЙТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ?	97
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	97

НАПУТСТВИЕ

Это 5-ое издание интерактивного задачника по математике «Wild Mathing». Вновь пополнился «Олимпиадный уголок», задачи ЕГЭ приведены в соответствии с актуальной демоверсией. Также здесь вы найдете самые свежие варианты вступительных экзаменов в Московский университет и многое другое. Материал по-прежнему будет наиболее полезен абитуриентам, но каждый найдет нечто новое и интересное для себя.

Как работать с пособием? Выберите актуальные разделы, одолейте предложенные задачи, а затем обратитесь к видеоразборам, кликнув по соответствующим номерам. Все ролики динамичны, содержат полные решения и верные ответы. Дополнительные материалы, важные детали и ответы на популярные вопросы вы найдёте в описании к видео и в комментариях. Любая активность на YouTube-канале приветствуется: если видеоряд оказался полезным — нажмите «Мне нравится», если по задаче возникли вопросы — смело спрашивайте в комментариях. И, конечно, подпишитесь на канал, чтобы не прозевать разумное, доброе, вечное.

Надеюсь, отправляясь всякий раз в математическое путешествие, вы хорошо понимаете, какова его [главная цель](#).

№1 ← для перехода к видеоразбору кликните по номеру задачи

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ В МГУ

ДВИ-2021

Вариант 1

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{25}{16}\right)^{-1/2} + \frac{\log_3(9^3)}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15}}$.
2. Добрыня Никитич в полтора раза старше Алёши Поповича и в полтора раза младше Илья Муромца. Сколько лет Добрыне Никитичу, если Илья Муромец старше Алёши Поповича на 20 лет?
3. Решите уравнение $\sin x - \cos 2x + \sin 3x = 1$.
4. Решите неравенство $\log_2 x + \log_2 3 \cdot \log_x 3 + \log_{\sqrt{2}} 3 < 0$.
5. В окружность вписан выпуклый восьмиугольник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8$. Известно, что

$$\angle A_1 A_4 A_7 = \frac{1}{2} \angle A_4 A_7 A_2 = \frac{1}{3} \angle A_7 A_2 A_5 = \frac{1}{4} \angle A_2 A_5 A_8 = \frac{1}{5} \angle A_5 A_8 A_3 = \frac{1}{6} \angle A_8 A_3 A_6 = \frac{1}{7} \angle A_3 A_6 A_1.$$

Найдите $\angle A_6 A_1 A_4$.

6. Найдите наибольшее значение, которое может принимать выражение $x + 7y$, если известно, что x, y удовлетворяют равенству

$$\sqrt{xy} + \sqrt{(1-x)(1-y)} = \sqrt{7x(1-y)} + \frac{\sqrt{y(1-x)}}{\sqrt{7}}.$$

7. Дана треугольная призма $ABC A' B' C'$ с основаниями $ABC, A' B' C'$ и боковыми ребрами AA', BB', CC' . Через точки B, C проходит плоскость, делящая объём призмы пополам. Эта плоскость пересекает прямую AA' в точке D . Найдите отношение $AA' : A'D$.

Вариант 2

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{2}{9}} \cdot \log_4 64 \cdot \log_8 64$.
2. Студент Савелий взбегает вверх по неподвижному эскалатору за 30 секунд, а по движущемуся вверх — за 20 секунд. За сколько секунд Савелий поднялся бы по движущемуся вверх эскалатору, если бы нашел в себе силы стоять на месте? (Собственную скорость бегущего Савелия считать постоянной).
3. Решите уравнение $2\sqrt{2} + \sqrt{2} \sin 2x = \sqrt{3}(\cos x - \sin x)$.
4. Решите неравенство $6^{x^2} + 6^{2x} \leq 2^{x^2+2x} + 3^{x^2+2x}$.
5. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает диагональ BD и сторону BC в точках K и L соответственно. Найдите площадь треугольника DKL , если известно, что площадь параллелограмма равна 8 и что $AD = 3 \cdot AB$.
6. Найдите все значения параметра a , при которых наименьшее (по x) значение выражения

$$\log_2^2(ax) + \log_2^2\left(\frac{1-a}{x}\right)$$

максимально.

7. Дан параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$ объема 1. На ребрах $AB, B' C', CD$ и $A' D'$ отмечены точки K, L, M и N соответственно. Известно, что $AK : KB = CM : MD = 1 : 3$ и $B' L : LC' = D' N : NA' = 1 : 2$. Найдите объём тетраэдра $KLMN$.

ДВИ-2020

Вариант 1

1. Известно, что $f(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x} - \frac{1}{24}$. Найдите $f\left(\frac{3}{5}\right)$.
2. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 105, которые делятся на 3, но не делятся на 5.
3. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x = 2 \cos 2x \cdot \operatorname{ctg} x$.
4. Решите неравенство $\log_{2x} 16 - \log_{4x} 8 \leq 1$.
5. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC проведены биссектрисы AD и CE . Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Найдите DE , если $AC = 12$ и $KL = 9$.
6. Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$ с основаниями ABC и $A'B'C'$. На диагоналях боковых граней AB' , BC' , CA' отмечены точки D , E , F соответственно. Найдите отношение, в котором плоскость DEF делит отрезок AA' , если $AD : DB' = 1 : 1$, $BE : EC' = 1 : 2$, $CF : FA' = 1 : 3$.
7. Найдите все положительные значения параметра a , при которых уравнение

$$\log_{2-x} (a^{2+x} + 2a^{1-x} + x - 1) + \log_{2+x} (a^{2-x} + 2a^{1+x} - x - 1) = 2$$

имеет ровно одно решение относительно x .

Вариант 2

1. Известно, что $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-3}} + \frac{19}{x}$. Найдите $f(12)$.
2. Дана возрастающая геометрическая прогрессия b_1, b_2, b_3, \dots , состоящая из положительных чисел. Известно, что сумма первого и третьего членов этой прогрессии равна второму члену, умноженному на $\frac{10}{3}$. Найдите отношение $b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10}$ к $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$.
3. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x$.
4. Решите неравенство $\log_{|2x-\frac{1}{2}|} \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) \geq \log_{|2x-\frac{1}{2}|} \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$.
5. На высоте AH остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Найдите отношение $BH : HC$, если $BD : DA = 2 : 1$ и $AE : EC = 3 : 1$.
6. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что $AB = BC = CD = 5$ и $CA = AD = DB = 6$. Найдите косинус угла между ребрами BC и AD .
7. Найдите все пары положительных чисел (x, y) , удовлетворяющих уравнению

$$\log_{2x^2y+1} (x^4 + y^2 + 1) = \log_{y^4+x^2+1} (2xy^2 + 1).$$

Вариант 3

1. Найдите целое число, задаваемое выражением:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2.$$

2. Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма первых десяти членов этой прогрессии равна 9, а сумма последних десяти членов равна 11. Найдите сумму $a_6 + a_7 + \dots + a_{14} + a_{15}$.

3. Решите уравнение $\cos x \cdot (2 \cos x - \cos 3x) = 1$.

4. Решите неравенство $3^x - 2^{x+1} \leq \sqrt{2 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 2^{2x+3}}$.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса AL и высота CH . Найдите косинус угла BAC , если $HL \parallel AC$.

6. Ребро куба $ABCD A' B' C' D'$ равно 1. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер $AB, AD, AA', CC', C' B', C' D'$.

7. Найдите все значения параметра a из промежутка $[0, 2\pi)$, при которых уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2} = x \cos a + y \sin a$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) , отличное от $(0, 0)$.

ДВИ-2019

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019 \cdot 2029 - 2016 \cdot 2032}$.
2. Найдите $a + b + c$, если известно, что $a + 2b = 3$, $b + 2c = 4$, $c + 2a = 5$.
3. Решите уравнение $7 \sin x + 2 \cos 2x = 5$.
4. Решите неравенство $2^{\log_2^2 x} + 7x^{\log_2 x} < 16$.
5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD : DB = BE : EA = 1 : 4$. Найдите AB , если известно, что площадь треугольника ABC равна 18, а тангенс угла DCE равен $5/3$.
6. Найдите все пары вещественных чисел $(a; b)$, при которых неравенство

$$2a(x+2)^4 + 9b(x-2)^4 \geq x^4 + 24x^2 + 16$$

справедливо для всех вещественных x .

7. Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π . Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что ребра параллелепипеда равны $1, \sqrt{3}, 3$.
8. Найдите все x, y из полуинтервала $(-\pi; \pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 24\sqrt{7} \sin x + 8 \sin y + 3\sqrt{14} \sin \frac{x+y}{2} = 9\sqrt{7}, \\ 8 \sin x \sin y + 3\sqrt{14} \sin x \sin \frac{x+y}{2} + \sqrt{2} \sin y \sin \frac{x+y}{2} = \frac{9\sqrt{7}}{8}. \end{cases}$$

ДВИ-2018

1. Какое из чисел $\frac{49}{18}$ или $\frac{79}{24}$ ближе к 3?

2. Найдите все значения параметра a , при которых разность между корнями уравнения

$$x^2 + 3ax + a^4 = 0$$

максимальна.

3. Решите уравнение $\sin 4x \cos 10x = \sin x \cos 7x$.

4. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x} \geq \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{\log_x (\sqrt{3} + \sqrt{2})}.$$

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Пусть M — середина отрезка AD , а N — произвольная точка отрезка BC . Пусть K — пересечение отрезков CM и DN , а L — пересечение отрезков MN и AC . Найдите все возможные значения площади треугольника DMK , если известно, что $AD : BC = 3 : 2$, а площадь треугольника ABL равна 4.

6. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - 8y + 6a + 28 \leq 0, \\ ay^2 - 6ay - 8x + 11a - 12 \leq 0 \end{cases}$$

имеет одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$ с боковыми ребрами AA' , BB' , CC' , DD' . На ребрах AB , BC , CD , DA нижнего основания отмечены соответственно точки K , L , M , N таким образом, что $AK : KB = 4 : 5$, $BL : LC = 3 : 1$, $CM : MD = 7 : 2$, $DN : NA = 3 : 1$. Пусть P , Q , R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$ соответственно. Найдите PQ , если известно, что $QR = 1$ и $AB : BC = 3 : 2$.

8. Найдите все пары чисел x , y из промежутка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{3} \sin y}{\sqrt{2} \sin(x+y)} + 1\right) \left(\frac{\sqrt{2} \sin x}{3 \sin y} + 1\right)^2 \left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3} \sin x} + 1\right)^4.$$

ДВИ-2017

1. Какое число больше: $\sqrt{\frac{6}{7} + 7 + \frac{7}{6}}$ или 3?
2. Известно, что $a + b + c = 5$ и $ab + bc + ac = 4$. Найдите $a^2 + b^2 + c^2$.
3. Решите уравнение $\sin 7x + \sin 6x = \sin x$.
4. Решите неравенство $x^2 \log_7^2 x + 3 \log_6^2 x \leq x \log_7 x \cdot \log_6 x^4$.
5. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямых AC и BC . На этой окружности выбрана точка D (внутри треугольника), лежащая на расстоянии $\sqrt{2}$ от прямой AB и на расстоянии $\sqrt{5}$ от прямой BC . Найдите угол $\angle DBC$, если известно, что $\angle ABD = \angle BCD$.
6. Василий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добраться вниз по реке до пункта B , причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Василий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A . Однако, промчавшись восемь километров, Василий заметил на берегу машущего ему рукой Григория, который просил по старой дружбе довести его до пункта C . И хоть пункт C Василий уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Василий с Григорием встретили идущий на встречу второй катер с друзьями Василия, откуда те крикнули, что им до пункта B осталась треть пути и чтобы Василий нигде не задерживался. Доставив Григория в пункт C , Василий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами B и C , если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, скорости катеров постоянны, а Василий действительно нигде не задерживался.
7. Из вершины D на плоскость основания ABC пирамиды $ABCD$ опущена высота DH . Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников HBC , HAC , HAB равны соответственно $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$ и что все три плоских угла при вершине D прямые.
8. Решите данную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{\cos(x^2 - y^2)} - y \cdot \operatorname{tg}(x^2 - y^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ \frac{y}{\cos(x^2 - y^2)} - x \cdot \operatorname{tg}(x^2 - y^2) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}. \end{cases}$$

ДВИ-2016

1. Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{3}{7}$.
2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 6 = 0$ равна 5. Найдите все возможные значения a .
3. Решите уравнение $2 \cos^2 x + 3 \sin 2x = 4 + 3 \cos 2x$.
4. Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x} (1 + \log_3^2 3) \leq 1$.
5. Две окружности касаются внутренним образом в точке T . Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S . Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C . Найдите площадь четырехугольника $TACB$, если известно, что $CB = BT = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5 : 8$.
6. Ровно в 9:00 из пункта A в пункт B выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта A проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт B , из пункта B в пункт A выехал автобус. Когда до пункта A оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт A , если известно, что автобус прибыл в пункт A ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.
7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB , перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K так, что $BK : KC = 3 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS , параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS .
8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106 + \log_a^2 \cos ax + \log_a \cos^{10} ax} + \sqrt{58 + \log_a^2 \sin ax - \log_a \sin^6 ax} + \sqrt{5 + \log_a^2 \operatorname{tg} ax + \log_a \operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a, x) , при которых оно достигается.

ДВИ-2015

1. Найдите $f(2)$, если $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{3}{x} + \frac{1}{10}$.
2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$.
3. Решите неравенство $\cos x + \sqrt{2} \cos 2x - \sin x \geq 0$.
4. Решите уравнение $\log_x |2x^2 - 3| = 4 \log_{|2x^2 - 3|} x$.
5. Окружность радиуса $3/2$ касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E так, что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться AC , если $\angle BAC = 30^\circ$.
6. Велосипедист Василий выехал из пункта A в пункт B . Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадежно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт A за новым велосипедом. В момент поломки из пункта A выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта A он встретит Василия, если пункт B отстоит от пункта A на 4 км, а Василий доберется до пункта A тогда же, когда Григорий до пункта B ? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.
7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC , $A'B'C'$ и ребрами AA' , BB' , CC' вписана сфера. Найдите ее радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.
8. Найдите все пары (α, β) , при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4 - 3 \sin \alpha}{2 + \cos 2\alpha} + \frac{2 + \cos 2\alpha}{\beta^2 + \beta + 1} + \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\sqrt{\beta} + 1} + \frac{\sqrt{\beta} + 1}{4 - 3 \sin \alpha}.$$

ДВИ-2014

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}(8 + 4\sqrt{3})$.
2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}(x^2 - 6x + 17)$.
3. Найдите все положительные x , удовлетворяющие неравенству $x^{3x+7} > x^{12}$.
4. Решите уравнение $\cos^2 x - \cos x \sin^2 \left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12} \right) + \frac{1}{4} = 0$.
5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2 . Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A , пересекает отрезок B_1B_2 в точке C . Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1 , O_1O_2 , O_2B_2 в точках D_1 , L , D_2 соответственно. Найдите отношение $LD_2:O_2D_2$, если известно, что $CD_1 = CO_1$.
6. Найдите все положительные x , y , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + y = 16, \\ x + y^{\frac{2}{3}} = 8. \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.
8. Пусть

$$f(x, y) = \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y,$$

$$g(x, y) = -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

ДВИ-2013

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $5/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

2. Вычислите $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$.

3. Решите неравенство

$$9(1 + 5^{1-2x})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(5^{2x} + 5)^{\frac{1}{2}} \geq 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{\cos x}{\cos 5x}.$$

5. В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер «Быстрый». Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер «Смелый». В этот же самый момент «Быстрый», не желая встречи со «Смелым», развернулся и пошел обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от «Быстрого» до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от «Смелого» до «Быстрого», на «Смелом» осознали, что они идут с «Быстрым» на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r . Найдите r , если $R = 12$, а косинус угла между диагональю AC и основанием AD равен $3/4$.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC , такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D так, что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sin\left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.

ДВИ-2012

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{3}$, а свободный член равен -2 .
2. Вычислите $\log_2 \log_{81} \frac{417}{139}$.
3. Решите неравенство $(9^x - 3^{x+2} + 14) \cdot \sqrt{4 - 2^x} \leq 0$.
4. Решите уравнение $\sin 3x = \sqrt{2} \cos x - \sin x$.
5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $|x| + |x + 3y| + 3|y - 2| = 6$.
6. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E соответственно и пересекает сторону AC в точках F, G (точка F лежит между точками A и G). Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AF = 5$, $GC = 2$, $AD : DB = 2 : 1$ и $BE = EC$.
7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $a\sqrt{x+y} = \sqrt{3x} + 2\sqrt{y}$ имеет единственное решение (x, y) .
8. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AC = BC = 5$ и $AB = 6$, боковые ребра AS, BS, CS пирамиды равны соответственно 7, 7 и 4. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается прямых AC и BC . Найдите высоту цилиндра.

ДВИ-2011

1. Вычислите значение функции $x^2 - 0,625x - \frac{1}{8}$ в точке $x = \frac{4}{5}$.
2. Решите уравнение $(\sin x + \cos x)^2 = 1$.
3. Решите уравнение $\log_2(3x - 4) = \log_4(2 - x)$.
4. Решите неравенство $\frac{\sqrt{5x+3}-1}{\sqrt{3x+2}-1} > 1$.
5. Медианы AL и BM треугольника ABC пересекаются в точке K . Найдите длину отрезка CK , если $AB = \sqrt{3}$ и известно, что вокруг четырехугольника $KLCM$ можно описать окружность.
6. Найдите наибольшее значение функции $\frac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x}$ и точку x , в которой это значение достигается.
7. В закрытой коробке, имеющей форму куба со стороной 5, лежат два шара. Радиус первого из них равен 2. Этот шар касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Второй шар касается двух других боковых граней куба, плоскости основания и первого шара. Чему равен радиус второго шара?
8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \leq 1, \\ 4x + 7y \geq 3. \end{cases}$$

Дополнительно

1. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2 \sin^2(\pi x) - 3 \sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \frac{3}{2} \sin^2(\pi x) - 2 \sin^2(\pi y) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \log_2 \left(1 + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi a}{4} - \frac{\pi}{16} \right) - x^2 - y^2 \right) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

2. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \left| 6\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} - 5 \right| + \left| 12\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} + 1 \right| - \left| 1 - 6\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} \right| = 5 - \left(\sin \frac{\pi(y-2x)}{12} \right)^2, \\ 10 - 9(x^2 + (y-a)^2) = 3\sqrt{x^2 + (y-a)^2 - \frac{8}{9}}. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

3. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sin^2 x + (a-2)^2 \sin x + a(a-2)(a-3) = 0$$

имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три различных корня.

4. Найдите произведение корней уравнения

$$\sin \frac{x^2 + x + 1}{2x} + \cos \frac{x^2 - x + 1}{2x} = \frac{x^2 - 4x + 1}{x} \cdot \cos \frac{\pi - 2}{4}.$$

5. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует единственная тройка (x, y, z) действительных чисел x, y, z , удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} z \cdot \cos(x-y) + (2+xy) \cdot \sin(x+y) - z = 0, \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x+y+a \cdot \sin^2 z)((1-a) \ln(1-xy) + 1) = 0. \end{cases}$$

ОЛИМПИАДНЫЙ УГОЛОК

Олимпиада «Физтех»

1. Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. Сфера с центром O вписана в трехгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трехгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трехгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трехгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

5. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй — точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD).

а) Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}, \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

Геометрия. Теория

1. (*Окружность девяти точек*) Докажите, что основания трех высот треугольника, середины трех его сторон и середины трех отрезков, соединяющих вершины треугольника с ортоцентром, лежат на одной окружности.
2. (*Лемма о трезубце*) В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, точка I_B — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC , отрезок II_B пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке L . Докажите, что $LA = LC = LI = LI_B$.
3. (*Внешняя лемма о трезубце*) Докажите, что точка пересечения биссектрисы внешнего угла B треугольника ABC с его описанной окружностью равноудалена от точек A, C, I_A, I_C , где I_A, I_C — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и AB соответственно.
4. (*Свойство ортотреугольника*) Докажите, что высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами углов его ортотреугольника, то есть треугольника с вершинами в основаниях высот данного.
5. (*Прямая Эйлера*) Докажите, что точка пересечения медиан треугольника лежит на прямой, проходящей через центр описанной окружности и ортоцентр треугольника.
6. (*Теорема Вивизиани*) Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри правильного треугольника до его сторон постоянна и равна высоте треугольника.
7. (*Сумма радиусов вневписанных окружностей*) Докажите, что в треугольнике ABC выполнено равенство $r_a + r_b + r_c = 4R + r$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника, r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB соответственно.
8. (*Формула Карно*) Докажите, что сумма расстояний от центра описанной окружности остроугольного треугольника до его сторон равна сумме радиусов вписанной и описанной окружностей.
9. (*Теорема Коперника*) Докажите, что траекторией точки окружности, катящейся без проскальзывания по внутренней стороне окружности вдвое большего радиуса, является прямая.
10. (*Принцип Ферма*) Точки A и B лежат по одну сторону от прямой l . Где поставить точку M на прямой l , чтобы сумма $AM + MB$ была минимальна?
11. (*Теорема Монжа*) Для трех произвольных окружностей, каждая из которых не лежит целиком внутри другой, точки пересечения общих внешних касательных к каждой паре окружностей лежат на одной прямой.
12. (*Теорема Брианшона*) Если шестиугольник описан около окружности, то три диагонали, соединяющие противоположные вершины этого шестиугольника, проходят через одну точку.
13. (*Теорема Дезарга*) Если два треугольника расположены на плоскости таким образом, что прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, проходят через одну точку, то три точки, в которых пересекаются продолжения трех пар соответственных сторон треугольников, лежат на одной прямой.
14. (*Задача Ферма-Торричелли*) Найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника наименьшая.
15. (*Теорема Наполеона*) На каждой стороне произвольного треугольника построили извне по равностороннему треугольнику. Докажите, что треугольник с вершинами в центрах равносторонних треугольников — тоже равносторонний.
16. (*Первая лемма о воробьях*) На сторонах AB и AC неравностороннего треугольника ABC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно, точка A_0 — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что если $BC_1 = CB_1$, то четырехугольник $A_0AC_1B_1$ вписанный.
17. (*Теорема Менелая*) На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки C_1 и A_1 соответственно. Точка B_1 лежит на продолжении стороны AC за точку C . Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

18. (Теорема Чевы) На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

19. (Теорема Ван-Обеля) На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке P . Докажите, что верно равенство

$$\frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BP}{PB_1}.$$

20. (Точка Жергонна) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон вписанной окружностью, пересекаются в одной точке.

21. (Точка Нагеля) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с соответствующими внеписанными окружностями, пересекаются в одной точке.

22. (Теорема о четырех точках трапеции) Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

23. (Теорема синусов) Пусть R — радиус описанной окружности треугольника со сторонами a , b , c , а α , β , γ — соответственно углы напротив этих сторон. Докажите, что

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

24. (Теорема косинусов) Пусть a , b , c — стороны треугольника, причем угол напротив последней из них равен γ . Докажите, что

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

25. (Формулы радиусов окружностей треугольника) Пусть a , b , c — стороны треугольника. R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно, а r_a — радиус внеписанной окружности, касающейся стороны a . Докажите, что

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{S}{p}, \quad r_a = \frac{S}{p-a},$$

если S — площадь треугольника, а p — его полупериметр.

26. (Свойства хорд и секущих) Пусть хорды AB и CD окружности пересекаются в точке S . Докажите, что $AS \cdot SB = CS \cdot SD$. Докажите также, что это равенство будет верно, если S — точка пересечения секущих AB и CD окружности.

27. (Формула Эйлера) Пусть R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника с центрами в точках O и I . Докажите, что $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

28. (Формула Эйлера, внешний случай) Пусть R и r_a — соответственно радиусы описанной и внеписанной окружностей треугольника с центрами в точках O и I_a . Докажите, что $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$.

29. (Теорема Помпею) На описанной окружности правильного треугольника отметили точку P . Докажите, что сумма расстояний от точки P до некоторых двух вершин треугольника равна расстоянию от нее до третьей вершины.

30. (Первая теорема Тебо) На сторонах параллелограмма извне построили квадраты. Докажите, что центры этих четырех квадратов образуют также квадрат.

31. (Задача Фаньяно) На каждой из сторон данного треугольника требуется отметить по одной точке. Как именно это следует сделать, чтобы периметр треугольника с вершинами в отмеченных точках был минимальным?

Геометрия. Задачи

1. Точки A, B, C, D — вершины выпуклого четырехугольника. Где поставить точку P , чтобы сумма расстояний $AP + BP + CP + DP$ была минимальна?
2. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O . Причем $\angle AOC = 60^\circ$. Докажите, что $AC + DB \geq 1$.
3. Лестница, стоявшая на гладком полу у стены, соскальзывает вниз (все время касаясь стены). По какой линии движется котенок, сидящий на середине лестницы?
4. Деревни Алексеево и Борисовка разделены двумя параллельными реками разной ширины (см. рисунок). На каждой реке нужно поставить по мосту так, чтобы путь из одной деревни в другую был наименьшим (при этом мосты перпендикулярны берегам). Как это сделать?
5. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны соответственно 3 и 1. Биссектриса BD равна $\sqrt{2}$. Найдите угол BAC .
6. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1, BB_1 пересекаются в точке O . Известно, что $2 \cdot AO = 7 \cdot OA_1, BO = 2 \cdot OB_1$. Найдите отношение высоты, опущенной из точки A , к радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.
7. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно. При этом $AM : MB = 3 : 1, CN : NB = 1 : 7$. Какой процент от площади четырехугольника $AMNC$ составляет площадь треугольника MBN ?
8. В четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2, BC = 4, CD = 5$ вписали окружность и вокруг него описали окружность. Найдите площадь четырехугольника.
9. Окружность касается одной из сторон угла с вершиной A в точке B и пересекает вторую сторону в точках C и D , причем AD в три раза меньше AC . Косинус угла A равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
 - а) Найдите отношение BC к BD .
 - б) Найдите отношение радиуса окружности к BD .
10. Пусть внеписанная окружность треугольника ABC , лежащая напротив вершины A , касается стороны BC в точке A_1 . Точки B_1 на стороне CA и C_1 на стороне AB определяются аналогичным образом с использованием внеписанных окружностей, лежащих напротив вершин B и C соответственно. Известно, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
11. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC , $\angle SCB = 90^\circ, BC = \sqrt{5}, AC = \sqrt{7}$. Последовательность точек O_n строится следующим образом: точка O_1 — центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$, и для каждого натурального $n \geq 2$ точка O_n — это центр сферы, описанной около пирамиды $O_{n-1}ABC$. Какую длину должно иметь ребро SA , чтобы множество $\{O_n\}$ состояло ровно из двух различных точек?

Принцип Дирихле

1. Докажите, что никакая прямая не может пересекать все три стороны треугольника. (*Прямая не проходит через вершину треугольника*)
2. Семь цветков растут в клумбе, имеющей форму правильного шестиугольника со стороной 1 метр. Всегда ли найдутся ли среди них два цветка, удаленных друг от друга не более чем на 1 метр?
3. Известно, что в Санкт-Петербурге проживает более 5 млн человек. Докажите, что среди петербуржцев найдется более 50 человек, которые родились в один год и один день.
4. Какое наибольшее число королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?
5. В прямоугольнике 3×4 расположено семь точек. Всегда ли найдутся ли среди них две, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$?
6. В прямоугольнике 3×4 расположено шесть точек. Всегда ли найдутся ли среди них две, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$?
7. Первоклассница Маша знает только цифру 1. Может ли она написать число, делящееся на 2021?

Классические неравенства

1. (*Неравенство Йенсена*) Пусть $y = f(x)$ — функция, выпуклая вниз на некотором интервале; x_1, x_2, \dots, x_n — числа из этого интервала; m_1, m_2, \dots, m_n — положительные числа, сумма которых равна единице. Тогда выполнено неравенство

$$m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \dots + m_n f(x_n) \geq f(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n).$$

2. (*Неравенства о средних*) Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — положительные числа, тогда

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}},$$

причем равенство достигается только при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

3. (*Неравенство Коши-Буняковского*) Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ — положительные числа. Тогда

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2.$$

4. (*Неравенство Гёльдера*) Пусть p, q — положительные числа, причем $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n верно неравенство

$$(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Индукция

1. Докажите равенство $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. (*Неравенство Бернулли*) Докажите неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $x > -1$.
3. (*Неравенство Коши о средних*) Докажите, что среднее арифметическое любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ не меньше их среднего геометрического, то есть верно неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

4. (*Малая Теорема Ферма*) Пусть a — целое число, p — простое. Докажите, что $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Тригонометрия

1. Найдите сумму различных корней уравнения $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0$, принадлежащих интервалу $(0; \pi)$.
2. Сравните числа $\frac{\sin 2016^\circ}{\sin 2017^\circ}$ и $\frac{\sin 2018^\circ}{\sin 2019^\circ}$.
3. Вычислите $2 \operatorname{arctg} 2 + \arcsin \frac{4}{5}$.
4. Докажите равенство $\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.
5. Решите уравнение $\cos^2 x - \cos x \sin^2 \left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12} \right) + \frac{1}{4} = 0$.
6. Решите уравнение $\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{\cos x}{\cos 5x}$.

Неравенства о средних и тригонометрия

1. Найдите все пары (α, β) , при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4 - 3 \sin \alpha}{2 + \cos 2\alpha} + \frac{2 + \cos 2\alpha}{\beta^2 + \beta + 1} + \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\sqrt{\beta} + 1} + \frac{\sqrt{\beta} + 1}{4 - 3 \sin \alpha}.$$

2. Найдите все пары чисел x, y из промежутка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{3} \sin y}{\sqrt{2} \sin(x+y)} + 1 \right) \left(\frac{\sqrt{2} \sin x}{3 \sin y} + 1 \right)^2 \left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3} \sin x} + 1 \right)^4.$$

3. Найдите все x, y из полуинтервала $(-\pi; \pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 24\sqrt{7} \sin x + 8 \sin y + 3\sqrt{14} \sin \frac{x+y}{2} = 9\sqrt{7}, \\ 8 \sin x \sin y + 3\sqrt{14} \sin x \sin \frac{x+y}{2} + \sqrt{2} \sin y \sin \frac{x+y}{2} = \frac{9\sqrt{7}}{8}. \end{cases}$$

Арифметика и теория чисел

1. Найти наибольшее натуральное n , для которого число $6500!$ делится на каждое из чисел k^k при $k = 1, 2, 3, \dots, n$.
2. Бессмертная блоха прыгает по целым точкам на числовой прямой, стартуя с точки 0. Длина первого прыжка равна 3, второго — 5, третьего — 9, и так далее (длина k -го прыжка равна $2^k + 1$). Направление прыжка (вправо или влево) блоха выбирает самостоятельно. Может ли так случиться, что блоха рано или поздно побывает в каждой натуральной точке (возможно, побывав в некоторых точках больше, чем по разу)?
3. Существуют ли такие двузначные натуральные числа m и n , что $\left| \frac{m^2}{n^2} - 2 \right| \leq \frac{1}{10000}$?
4. Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел. Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{3; 4; 5; 6; 8; 10; 12\}$?
5. Найдите все четырехзначные числа, произведение цифр которых в 12,5 раз больше суммы.
6. По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель. Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?
7. Существует ли окружность, на которой имелась бы ровно одна рациональная точка? (То есть единственная точка, у которой обе декартовы координаты — рациональные числа).

Комбинаторика и теория графов

1. Докажите формулу Эйлера для плоских графов: $V - P + \Gamma = 2$.
2. Билет с шестизначным номером называется счастливым, если сумма первых трех цифр его номера совпадает с суммой последних трех цифр. Найдите количество счастливых шестизначных билетов.
3. Сколькими способами можно выстроить трех человек в одну очередь? Четырех человек? n человек?
4. Сколькими способами можно выбрать трех человек из пяти? k человек из n ?
5. Сколько двумерных граней у четырехмерного гиперкуба? Сколько шестимерных граней у семи-мерного гиперкуба?
6. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых есть преступник и свидетель. Каждый день детектив может пригласить к себе нескольких из этих 80 человек. Если среди приглашенных есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Может ли Ниро Вульф заведомо раскрыть дело за 12 дней?
7. Докажите, что площадь многоугольника с целыми вершинами и без самопересечений определяется формулой

$$S = i + \frac{b}{2} - 1,$$

где i — количество целых точек внутри фигуры, b — количество целых точек на ее границе.

Разные задачи

1. Из пункта A в пункт B в 8:00 выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в A в 17:00 того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?
2. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $|x| + |x + 3y| + 3|y - 2| = 6$.
3. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x} \geq \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{\log_x(\sqrt{3}+\sqrt{2})}.$$

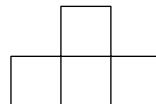
4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106 + \log_a^2 \cos ax + \log_a \cos^{10} ax} + \sqrt{58 + \log_a^2 \sin ax - \log_a \sin^6 ax} + \sqrt{5 + \log_a^2 \operatorname{tg} ax + \log_a \operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a, x) , при которых оно достигается.

5. Что больше: e^π или π^e ?

6. Можно ли покрыть клетчатое поле 6×6 девятью фигурами, изображенными справа?



Геометрические интерпретации

1. Найдите формулу для вычисления суммы $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.
2. Найдите формулу для вычисления суммы $\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.
3. Найдите формулу для вычисления суммы $\sum_{k=1}^n T_k = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots + T_n$.

Задачи с параметром

1. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 - 14x^2 + ax - 27 = 0$ имеет три действительных различных корня, образующих геометрическую прогрессию?
2. При каких значениях параметра a уравнение $3^{x^2 - 2ax + a^2} = ax^2 - 2a^2x + a^3 + a^2 - 4a + 4$ имеет ровно одно решение?
3. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sin\left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$ имеет бесконечно много решений.
4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sin^2 x + (a - 2)^2 \sin x + a(a - 2)(a - 3) = 0$$

имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три различных корня.

5. График функции $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $c < 0$ пересекает ось ординат в точке A и имеет ровно две общие точки M и N с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке M , проходит через точку A . Найдите a , b и c , если площадь треугольника AMN равна 1.

6. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - 8y + 6a + 28 \leq 0, \\ ay^2 - 6ay - 8x + 11a - 12 \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x + 5)^2 + y^2 - a^2) \ln(9 - x^2 - y^2) = 0, \\ ((x + 5)^2 + y^2 - a^2) (x + y + 5 - a) = 0. \end{cases}$$

имеет два различных решения.

8. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует единственная тройка (x, y, z) действительных чисел x, y, z , удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} z \cdot \cos(x - y) + (2 + xy) \cdot \sin(x + y) - z = 0, \\ x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x + y + a \cdot \sin^2 z)((1 - a) \ln(1 - xy) + 1) = 0. \end{cases}$$

ВАРИАНТЫ ЕГЭ. ЧАСТЬ «С»

Вариант I

12. а) Решите уравнение $3^{3x} - 4 \cdot 3^{x+2} + 3^{5-x} = 0$.
 б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_7 4; \log_7 16]$.
13. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Его сечением плоскостью α , проходящей через диагональ BD_1 параллельно прямой AC , является ромб.
 а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.
 б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью грани $BCC_1 B_1$, если $AB = 12, AA_1 = 10$.
14. Решите неравенство $\log_2^2(25 - x^2) - 7 \log_2(25 - x^2) + 12 \geq 0$.
15. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; 3; \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?
16. В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 60^\circ, \angle BCA = 45^\circ$.
 а) Докажите, что A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
 б) Найдите $A_1 H$, если $BC = 2\sqrt{3}$.
17. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств
- $$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$
- имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.
18. На доске написаны несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.
 а) Может ли на доске быть 5 чисел?
 б) Может ли на доске быть 6 чисел?
 в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Вариант II

12. а) Решите уравнение $\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

13. Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 3. На луче $A_1 C$ отмечена точка P так, что $A_1 P = 4$.

- а) Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.
 б) Найдите длину отрезка AP .

14. Решите неравенство $(9^x - 2 \cdot 3^x)^2 - 62 \cdot (9^x - 2 \cdot 3^x) - 63 \geq 0$.

15. В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число.

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

16. Точка M — середина гипотенузы AB треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет BC в точке N .

- а) Докажите, что $\angle CAN = \angle CMN$.
 б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ANB и CBM , если $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{4}{3}$.

17. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |a| \leq 4, \\ x^2 + 8x < 16a + 48 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-1; 0]$.

18. На доске написаны несколько (более одного) различных натуральных чисел, причем любые два из них отличаются не более чем в три раза.

- а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?
 б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?
 в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

Вариант III

12. а) Решите уравнение
$$\frac{\sqrt{\sin x + \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot \log_{\sqrt{7}} \sin x + 3 \cdot \log_{343} \cos x + \frac{\log_5 2}{\log_5 7} \right)}{\cos^2 6x - 1} = 0.$$

б) Укажите все корни этого уравнения из промежутка $(\lg(\cos 2\pi); e^{2 \ln \sqrt{2\pi}}]$.

13. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 6. Через середины ребер AC и BB_1 и вершину A_1 призмы проведена секущая плоскость.

а) Докажите, что ребро BC делится секущей плоскостью в отношении $2 : 1$, считая от точки C .

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

14. Решите неравенство $|\log_2 x - 4| \geq 3 + \frac{1}{5 - |\log_2 x - 4|}$.

15. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;
- с 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 339 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года кредитования?

16. В трапеции $ABDC$ основания BC и AD относятся как $1 : 2$. Пусть K — середина диагонали AC . Прямая DK пересекает сторону AB в точке L .

а) Докажите, что $AL = 2BL$.

б) Найдите площадь четырехугольника $BCKL$, если площадь трапеции равна 9.

17. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $x^2 + 5|x - a| - 7x \leq -4a$ имеет единственное решение.

18. После того, как учитель доказал классу новую теорему, выяснилось, что большая часть класса (возможно, все) не поняла доказательство. На перемене один ученик вдруг понял доказательство (и только он). Также известно, что в классе учится не более 30, но не менее 20 человек.

а) Могло ли получиться так, что теперь уже меньшая часть класса не понимает доказательство?

б) Могло ли получиться так, что исходно процент учеников, понявших доказательство, выражался целым числом, а после перемены — нецелым числом?

в) Какое наибольшее целое число может принимать процент учеников класса, так и не понявших доказательство этой теоремы?

Вариант IV

12. а) Решите уравнение $\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x$.
 б) Укажите все корни этого уравнения из промежутка $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$.
13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 2. Точка M – середина ребра AA_1 .
 а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.
 б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C .
14. Решите неравенство $3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geq 3$.
15. В регионе A среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 43740 рублей и ежегодно увеличивался на 25%. В регионе B среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 60000 рублей. В течение трех лет суммарный доход жителей региона B увеличивался на 17% ежегодно, а население увеличивалось на $m\%$ ежегодно. В 2017 году среднемесячный доход на душу населения в регионах A и B стал одинаковым. Найдите m .
16. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны длины сторон и диагональ: $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.
 а) Докажите, что около этого четырехугольника можно описать окружность.
 б) Найдите BD .
17. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = a^2 - 3a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18. а) Существуют ли такие двузначные натуральные числа m и n , что $\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{100}$?
 б) Существуют ли такие двузначные натуральные числа m и n , что $\left| \frac{m^2}{n^2} - 2 \right| \leq \frac{1}{10000}$?
 в) Найдите все возможные значения натурального числа n , при каждом из которых значение выражения $\left| \frac{n+10}{n} - \sqrt{2} \right|$ является наименьшим.

Вариант V

12. а) Решите уравнение $2 \log_2^2(2 \cos x) - 9 \log_2(2 \cos x) + 4 = 0$.
 б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.
13. Дана треугольная пирамида $SABC$ с ребрами $SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}$ и $SA = BC = 2\sqrt{5}$.
 а) Докажите, что прямые SA и BC перпендикулярны.
 б) Найдите расстояние между прямыми SA и BC .

14. Решите неравенство $\frac{4^x - 6 \cdot 2^x - 20}{2^x - 32} \geq 1$.

15. В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
 — каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
 — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 — в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее S , при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

16. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков).
 а) Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.
 б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника MPQ , если $DP \perp PC$, $AB = 25$, $BC = 3$, $CD = 28$, $AD = 20$.

17. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = ax - 2a - 1 + |x^2 - x - 2|$ меньше, чем -2 .

18. Вася и Петя решали задачи из сборника, причем каждый следующий день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий, а Петя — на две задачи больше, чем в предыдущий. В первый день каждый решил хотя бы одну задачу, а в итоге каждый решил все задачи сборника.
 а) Могло ли быть в сборнике 85 задач?
 б) Могло ли быть в сборнике 213 задач, если каждый из мальчиков решал их более трех дней?
 в) Какое наибольшее количество дней мог решать задачи Петя, если Вася решил весь сборник за 16 дней, а количество задач в сборнике меньше 300.

Вариант VI

12. а) Решите уравнение $\frac{\sin 2x - \cos x}{\cos 2x - \sin x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_{\pi} e; 3 \log_e \pi]$.

13. В тетраэдре $ABCD$ точка N — пересечение медиан грани ABD , точка L — пересечение медиан грани ABC .

а) Докажите, что CN пересекает отрезок DL и делит его в отношении $3 : 1$, считая от точки D .

б) Какую часть объема тетраэдра $ABCD$ занимает объем пирамиды $BKNML$, если точка K — середина ребра AB , а точка M — пересечение отрезков CN и DL ?

14. Решите неравенство $3^x + 4^x \leq 5^x$.

15. В июле 2020 года для развития бизнеса планируется взять кредит в банке на пять лет в размере 200 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Долг (млн руб.)	200	125	x	100	75	0

Долг на июль 2022 года составляет x млн рублей, причем $100 \leq x \leq 125$. Найдите наибольшее значение x , при котором общая сумма выплат по кредиту будет не более 262 млн рублей.

16. В треугольнике ABC точки M_1, M_2, M_3 — середины сторон AB, BC, AC соответственно, а точки H_1, H_2, H_3 — основания высот, лежащие на тех же сторонах.

а) Докажите, что из отрезков H_1M_2, H_2M_3, H_3M_1 можно составить треугольник.

б) Найдите периметр этого треугольника, если периметр треугольника ABC равен a .

17. Найдите все значения параметра b , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y = \pi x - \frac{\pi^2}{4}, \\ b \cdot \arcsin(\sin x) = y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

18. Четыре музыкальных критика оценивают новый альбом. Каждый из них выставляет одну оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Рейтинг альбома определяется формулой

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{4}}$$

на основе выставленных оценок x_1, x_2, x_3, x_4 .

а) Может ли рейтинг альбома оказаться больше 9, если известно, что один из критиков выставил оценку 6?

б) Может ли рейтинг альбома оказаться натуральным числом, если известно, что только у двух из четырех критиков выставленные оценки совпали?

в) Найдите наименьшее возможное значение рейтинга альбома, если известно, что сумма всех выставленных оценок равна 36.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.
 - а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \dots; 199\}$ хорошим?
 - б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{200}\}$ хорошим?
 - в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{3; 4; 5; 6; 8; 10; 12\}$?
2. По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.
 - а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
 - б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
 - в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?
3. Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (раскалывать глыбы нельзя). А также грузовики для перевозки этих глыб грузоподъемностью 5 тонн.
 - а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках?
 - б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках?
 - в) Какое наименьшее количество грузовиков потребуется для перевозки всех глыб?
4. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).
 - а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
 - б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 1000?
 - в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 129.
5. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 46, а вместе солдат меньше чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.
 - а) Приведите пример количества солдат в первом и втором взводах.
 - б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?
 - в) Сколько в роте может быть солдат?
6. Каждое из чисел 5, 6, ..., 9 умножают на каждое из чисел 12, 13, ..., 17 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 30 полученных результатов складывают.
 - а) Какую наибольшую сумму можно получить в итоге?
 - б) Можно ли получить в итоге ноль?
 - в) Какую наименьшую по модулю сумму можно получить в итоге?
7. а) Существует ли четырехзначное число, произведение цифр которого в 15 раз больше суммы?
 б) Существует ли четырехзначное число, произведение цифр которого в 200 раз больше суммы?
 в) Найти все четырехзначные числа, произведение цифр которых в 12,5 раз больше суммы.
8. Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.
 - а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему быть равно 2?
 - б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему быть равно $4 : 3$?
 - в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему, если известно, что среднее по величине число равно 20?

9. Склад имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длины ребер которого выражаются целыми числами. Этот склад заполняют контейнерами размером $1 \times 1 \times 3$. При этом контейнеры можно располагать как угодно, но их грани должны быть параллельны граням склада.

- а) Могло ли получиться так, что склад объемом 150 невозможно полностью заполнить контейнерами?
- б) Могло ли получиться так, что складе объёмом 400 невозможно разместить 133 контейнера?
- в) Какой наибольший процент объема любого склада объемом не менее 200 гарантированно удастся заполнить контейнерами?

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Подготовительные задачи

1. При всех значениях a решите уравнение $(a - 1)x = a + 3$.
2. Для каждого значения a решите уравнение $\frac{x - a}{x - 5} = 0$.
3. Для каждого значения a решите неравенство $x^2 > a$.
4. При всех значениях параметра a решите неравенство $|x - 3| \geq a$.
5. При всех a решите неравенство $\sqrt{x} > -a$.
6. Решите неравенство $(0, 5)^x \leq b + 2$ для всех значений параметра b .
7. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\log_a x = 1$.
8. Для каждого значения параметра t решите уравнение $\sin x = t$.
9. Решите уравнение $(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x + 2 = 0$ при всех a .
10. При каких значениях a функция $y = \frac{3x^2}{3ax - 11}$ имеет минимум в точке $x = 6$?
11. При каких a сумма квадратов различных корней уравнения $x^2 - ax + a + 1 = 0$ больше 1?
12. При каких a из неравенства $2x + a < 2$ следует неравенство $x < -2$?

Графический метод

1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|-(x - 3)^2 + 4| = a$ имеет ровно два корня.

2. При каких значениях x уравнение

$$\frac{|t + 2|(t^2 - 3t + 2)}{t - 1} + x^2 - 1 = 0$$

имеет ровно два решения относительно t ?

3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 4y + 2x + 4)\sqrt{x + 4}}{\sqrt{5 - y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x} - 3 \right| = ax - 1$$

на промежутке $(0; +\infty)$ имеет хотя бы три корня.

5. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ (x - 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \leq 0, \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

7. При каких значениях m на плоскости найдётся круг, содержащий все точки, удовлетворяющие данной системе неравенств

$$\begin{cases} 2y - x \leq 2, \\ y + 2x \leq 2, \\ y + mx \geq -1? \end{cases}$$

8. Найдите все значения a , при которых неравенство $\frac{4x - a}{x - 2a} < 0$ выполнено для всех x , удовлетворяющих условию $2 \leq x \leq 4$.

9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (y - 2x)(2y - x) \leq 0, \\ \sqrt{(x + a)^2 + (y - a)^2} = \frac{|a + 1|}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x - 1} \ln(4x - a) = \sqrt{2x - 1} \ln(5x + a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

11. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x + 5)^2 + y^2 - a^2) \ln(9 - x^2 - y^2) = 0, \\ ((x + 5)^2 + y^2 - a^2)(x + y + 5 - a) = 0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

Аналитические методы

1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{1 - 2a\sqrt{1 + x^2} + a(1 + x^2)}{(1 + x^2) - 2\sqrt{1 + x^2}} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

2. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполнено при всех x .

3. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 - a - x$ имеет ровно три различных корня?

4. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на множестве $|x| \geq 1$ не менее 6.

5. При каких значениях параметра a область определения y содержит ровно 7 целых чисел, если

$$y = \sqrt{a^8 x^{0,25} - x^{0,25+x \log_x a} - a^{8,25} + a^x \sqrt{a^{0,5}}}.$$

6. Найдите все a , при которых система

$$\begin{cases} \left| 6\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} - 5 \right| + \left| 12\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} + 1 \right| - \left| 1 - 6\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} \right| = 5 - \left(\sin \frac{\pi(y-2x)}{12} \right)^2, \\ 10 - 9(x^2 + (y-a)^2) = 3\sqrt{x^2 + (y-a)^2 - \frac{8}{9}} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

7. При каких a один корень уравнения $(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0$ больше 1, а другой меньше 1?

8. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4 y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2 y^2) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sin^2 x + (a - 2)^2 \sin x + a(a - 2)(a - 3) = 0$$

имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три различных корня.

10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $3 \sin x + \cos x = a$ имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

11. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2 \sin^2(\pi x) - 3 \sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \frac{3}{2} \sin^2(\pi x) - 2 \sin^2(\pi y) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \log_2 \left(1 + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi a}{4} - \frac{\pi}{16} \right) - x^2 - y^2 \right) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

12. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует единственная тройка (x, y, z) действительных чисел x, y, z , удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} z \cdot \cos(x - y) + (2 + xy) \cdot \sin(x + y) - z = 0, \\ x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x + y + a \cdot \sin^2 z)((1 - a) \ln(1 - xy) + 1) = 0. \end{cases}$$

ПЛАНИМЕТРИЯ

1. Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .
 - а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
 - б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.
2. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.
 - а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 - б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.
3. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .
 - а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.
 - б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.
4. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , а BH — высота этого треугольника.
 - а) Докажите, что углы ABH и CBO равны.
 - б) Найдите BH , если $AB = 8$, $BC = 9$, $BH = BO$.
5. Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB = 30$, $BC = 24$, $CD = 50$, $AD = 74$.
 - а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
 - б) Найдите O_1O_2 .

*Больше полезной геометрии вы найдёте в разделе
«Олимпиадный уголок»*

«ЭКОНОМИЧЕСКИЕ» ЗАДАЧИ

1. Оля хочет взять в кредит 100000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка кредита 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24000 рублей?

2. Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

3. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

4. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

5. 30 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 30 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Пётр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

6. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

7. Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год, после начисления процентов, четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40%. Еще через год накоплена сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

8. В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн руб. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн руб;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r , если долг выплачен полностью и общие выплаты составили 6,1 млн рублей.

9. 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

10. Мария Петровна положила в банк 1 500 000 рублей под 7% годовых. Схема начисления процентов следующая: каждый год банк начисляет проценты на имеющуюся сумму вклада (то есть увеличивает сумму на 7%). По истечении двух лет банк повысил процент с 7% до 10%. Сколько лет должен пролежать вклад, чтобы он увеличился по сравнению с первоначальным на 577 993,5 рублей (при условии, что процент изменяться больше не будет)?

11. Цена производителя на товар A составляет 20 рублей. Прежде, чем попасть на прилавок магазина, товар проходит через несколько фирм-посредников, каждая из которых увеличивает текущую цену в 2 или 3 раза и осуществляет услуги по транспортировке и хранению товара. Магазин делает наценку 20%, после чего покупатель приобретает товар за 576 рублей. Сколько посредников было между магазином и производителем?

12. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее S , при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей

13. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. Во второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

14. Для увеличения выпуска продукции решено расширить производство за счет использования имеющейся свободной площади в 70 м^2 , на которой предполагается установить оборудование двух видов общей стоимостью не более 100 млн руб. Каждый комплект оборудования вида A занимает 20 м^2 , стоит 10 млн руб. и позволяет получить за смену 40 ед. продукции, а каждый комплект оборудования вида B занимает 10 м^2 , стоит 30 млн руб. и позволяет получить за смену 80 ед. продукции. Определить значение максимально возможного прироста выпуска продукции за смену.

15. Окно имеет форму прямоугольника, периметр которого равен 8 м. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

16. Для перевозки груза требуется изготовить закрытый короб в форме прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого относились бы как 2 : 3, а объем составлял бы 576 м^3 . Каковы должны быть размеры всех его сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

17. Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние?

18. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие завода, расположенного в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

19. В июле Виктор взял кредит в банке на сумму 20 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 28 млн рублей?

НЕРАВЕНСТВА

Решите неравенства

1. $25^x - 20^x - 2 \cdot 16^x \leq 0$
2. $\frac{25^x - 5^{x+2} + 26}{5^x - 1} + \frac{25^x - 7 \cdot 5^x + 1}{5^x - 7} \leq 2 \cdot 5^x - 24$
3. $\frac{3^x}{3^x - 3} + \frac{3^x + 1}{3^x - 2} + \frac{5}{9^x - 5 \cdot 3^x + 6} \leq 0$
4. $5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$
5. $\log_5(3x + 1) + \log_5\left(\frac{1}{72x^2} + 1\right) \geq \log_5\left(\frac{1}{24x} + 1\right)$
6. $\log_2(x + 1) + \log_3 x \leq 3$
7. $\log_{|x-1|}(\sqrt{6-x} + 4) \geq 2 \log_{(x-1)^2}(10 - 2x)$
8. $x^2 \log_7^2 x + 3 \log_6^2 x \leq x \log_7 x \cdot \log_6 x^4$
9. $2^{\log_2^2 x} + 7x^{\log_2 x} < 16$
10. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x} \geq (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\log_x(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$
11. $\log_{1-\log_3 x}(1 + \log_x^2 3) \leq 1$
12. $9(1 + 5^{1-2x})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(5^{2x} + 5)^{\frac{1}{2}} \geq 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}$
13. $(9^x - 3^{x+2} + 14) \cdot \sqrt{4 - 2^x} \leq 0$
14. $\log_{|2x-\frac{1}{2}|}\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) \geq \log_{|2x-\frac{1}{2}|}\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$
15. $3^x - 2^{x+1} \leq \sqrt{2 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 2^{2x+3}}$
16. $\log_2 x + \log_2 3 \cdot \log_x 3 + \log_{\sqrt{2}} 3 < 0$
17. $6^{x^2} + 6^{2x} \leq 2^{x^2+2x} + 3^{x^2+2x}$
18. $\log_{2x} 16 - \log_{4x} 8 \leq 1$
19. $\log_{|2x-\frac{1}{2}|}\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) \geq \log_{|2x-\frac{1}{2}|}\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$
20. $3^x - 2^{x+1} \leq \sqrt{2 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 2^{2x+3}}$

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Подготовительные задачи

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми $B_1 D_1$ и DC_1 .
2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми AA_1 и BD_1 .
3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми AC и BD_1 .
4. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми BD_1 и DC_1 .
5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N — середины ребер AA_1 и BB_1 соответственно. Найдите угол между прямыми BM и $C_1 N$.
6. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки A_1 , D_1 и B .
7. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E и F — середины ребер AA_1 и CC_1 соответственно. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки E , F и D_1 .
8. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ точка M — середина ребра $B_1 C_1$. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A , B и M .
9. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки N , E и M — середины ребер AA_1 , AB и BC соответственно. Постройте сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки N , E и M .
10. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка K делит ребро BB_1 на отрезки $BK = 3$ и $B_1 K = 1$. Постройте сечение куба плоскостью α , проходящей через точки C_1 , K параллельно к прямой BD_1 . В каком отношении плоскость α делит отрезок $B_1 D_1$?
11. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ с вершиной S . Точки M и N — середины ребер SA и SB соответственно. Постройте сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α , проходящей через точки M , N перпендикулярно к плоскости ABC .
12. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$. Постройте ее сечение плоскостью, проходящей через точки C_1 , D_1 и F .

Задачи ЕГЭ

1. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых ребер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.
 - а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
 - б) Найдите угол между прямыми SC и BD .
2. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$ с основаниями ABC и $A_1 B_1 C_1$. Скрещивающиеся диагонали BA_1 и CB_1 боковых граней $AA_1 B_1 B$ и $BB_1 C_1 C$ перпендикулярны
 - а) Докажите, что $AB : AA_1 = \sqrt{2} : 1$.
 - б) Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью BCC_1 .
3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1.
 - а) Докажите, что плоскости $AA_1 D_1$ и $DB_1 F_1$ перпендикулярны.
 - б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и $DB_1 F_1$.

4. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Точка M — середина ребра SE . Точка L делит ребро SC в отношении $2 : 1$, считая от вершины S .
- Докажите, что плоскость, проходящая через ребро AB и точку M , пересекает ребро SC в точке L .
 - $AB = 4\sqrt{3}$, $SA = 10$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC .
5. На ребрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, а $B_1 Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .
- Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
 - Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .
6. Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — ромб $ABCD$ с углом 120° при вершине D , а боковые грани призмы — квадраты.
- Докажите, что прямые $A_1 C$ и BD перпендикулярны.
 - Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания призмы равна $8\sqrt{3}$.
7. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра: $AB = 3$, $AA_1 = \sqrt{6}$. На ребрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены соответственно точки M , N и K так, что $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.
- Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M , N и K .
 - Найдите площадь полученного сечения.
8. Проведены две параллельные плоскости по разные стороны от центра шара на расстоянии 7 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении два круга, площади которых равны 9π и 16π .
- Точка H — ортогональная проекция произвольной точки окружности меньшего круга на плоскость большего. Докажите, что точка H делит проходящий через нее диаметр большей окружности в отношении $1 : 7$.
 - Найдите площадь поверхности шара.
9. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Апофема пирамиды вдвое больше стороны основания. Плоскость α проходит через ребро AB и делит пополам двугранный угол пирамиды при этом ребре.
- Докажите, что плоскость α делит высоту пирамиды в отношении $4 : 1$, считая от вершины S .
 - Найдите объем большей из частей, на которые пирамида разбивается плоскостью α , если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{15}$.
10. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Точка E — середина ребра SC . Плоскость α проходит через точки A и E параллельно к BD .
- Постройте сечение пирамиды плоскостью α .
 - В каком отношении плоскость α делит ребро SB ?
11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ точки M , N и L — середины ребер BC , DE и AA_1 соответственно.
- Докажите, что прямые MN и LC перпендикулярны.
 - Плоскость, проходящая через точки M , N и L , пересекает ребро BB_1 в точке P . Найдите отношение $BP : PB_1$.

Больше задач по стереометрии вы найдёте в [10-часовой трансляции](#)

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. а) Решите уравнение $\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.
б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.
2. а) Решите уравнение $(2 \sin x - 1) \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = 0$.
б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
3. а) Решите уравнение $5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{\sin^2 x} + 4 \cdot 5^{\cos 2x} = 25^{\frac{\sin 2x}{2}}$.
б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{1}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
4. а) Решите уравнение $\cos x + \frac{1}{\cos x} + \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{3}{4}$.
б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.
5. а) Решите уравнение $\log_2\left(5 + 3 \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin^2\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$.
б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

*Больше интересных тригонометрических уравнений вы найдете в разделе
«Вступительные испытания в МГУ»*

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?
2. Имеется два сплава. Первый содержит 31% меди, второй — 25% меди. Из этих двух сплавов получили третий. Сколько процентов составляет концентрация меди в нём, если массы первого и второго сплавов равны 120 кг и 80 кг соответственно?
3. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?
4. Один мастер может выполнить заказ за 12 часов, а другой за 6 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?
5. Винни-Пух съедает горшочек мёда за 3 минуты, Пятачок — за 8 минут, а ослик Иа — за 24 минуты. За сколько минут они съедят горшочек мёда втроем?
6. Игорь и Паша красят забор за 12 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 15 часов, а Володя и Игорь — за 20 часов. За какое время мальчики покрасят забор, работая втроем?
7. Расстояние между городами A и B равно 440 км. Из города A в город B со скоростью 60 км/ч выехал автомобиль, а через 3 часа после этого навстречу ему из города B выехал второй автомобиль. Найдите скорость второго автомобиля, если автомобили встретились через 2 часа после его выезда из города B . Ответ дайте в км/ч.
8. Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?
9. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.
10. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 80 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 36 секунд. Найдите длину поезда в метрах.
11. По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и товарный поезда, скорости которых равны 70 км/ч и 50 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 30 секундам. Ответ дайте в метрах.
12. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй длиной — 80 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго сухогруза составляет 400 метров. Через 12 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 600 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?
13. Баржа прошла по течению 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 3 часа больше, чем на путь по течению. Найдите скорость баржи в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

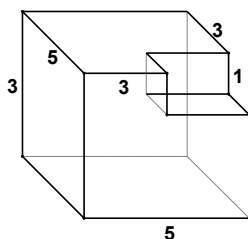
14. Расстояние между пристанями A и B равно 60 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B , тотчас повернула обратно и возвратилась в A . К этому времени плот прошел 36 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.
15. Войсковой обоз длиной 2 км движется со скоростью 3 км/ч. Вестовой пробегает из конца обоза до его начала и обратно за 30 минут. Найдите скорость вестового. Ответ дайте в км/ч.
16. Четыре одинаковые рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять таких же рубашек дороже куртки?
17. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года был продан за 15 842 рублей.
18. В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?
19. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 25 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 475 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.
20. Треть времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, вторую треть времени — со скоростью 75 км/ч, а последнюю треть — со скоростью 85 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.
21. Из посёлка A в посёлок B , расстояние между которыми равно 20 км, выехал грузовик, а через 8 минут следом за ним выехал автобус, скорость которого на 5 км/ч больше скорости грузовика. Найдите скорость автобуса, если в посёлок B он прибыл одновременно с грузовиком. Ответ дайте в км/ч.
22. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.
23. Из пункта A в пункт B в 8:00 выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в A в 17:00 того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

ВАРИАНТЫ ЕГЭ. ЧАСТЬ «В»

Некоторые задачи этого раздела содержат только условия (без ссылок на видеоразбор). Зато есть [дополнительное видео](#) по теме.

Вариант I

1. Решите уравнение $3^{\log_9(5x-5)} = 5$.
2. Фабрика выпускает сумки. Увы, в среднем 3 сумки из 25 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.
3. В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 4$, $\operatorname{tg} A = 0,75$. Найдите AC .
4. Найдите значение выражения $\sqrt{3} - \sqrt{12} \sin^2 \frac{5\pi}{12}$.
5. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

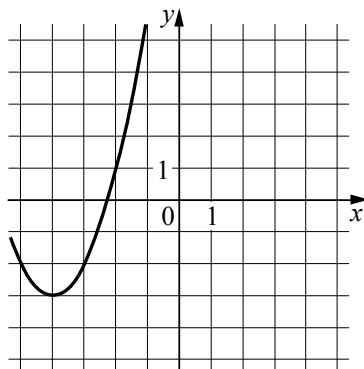


6. Прямая, заданная уравнением $y = -4x - 11$, является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.
7. Деревенский трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50$ м вычисляется по формуле

$$A = FS \cos \alpha.$$

При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

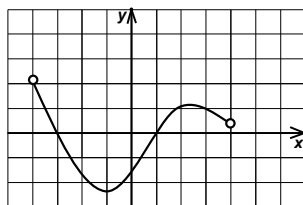
8. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 14 минут, первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?
9. На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-12)$.



10. Симметричную игральную кость бросили три раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало три очка»?
11. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

Вариант II

1. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = 2$.
2. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найти вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.
3. В треугольнике STK угол S равен 90° , SH — перпендикуляр к TK , $\cos K = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, $SK = 14$. Найдите SH .
4. Вычислите значение выражения $\frac{21}{3^{\log_3 7}} + \frac{6}{7^{\log_7 3}}$.
5. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 3. Найдите площадь треугольника ABC , если высота пирамиды равна 2.
6. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на промежутке $(-4; 4)$. Найдите точку минимума функции $y = f(x)$.

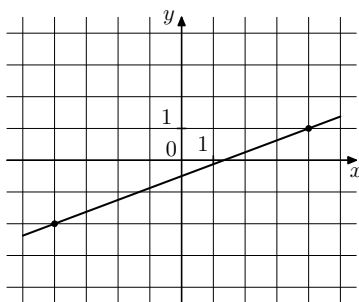


7. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой

$$h(t) = -t^2 + 14t,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска. Определите, сколько секунд камень находился на высоте выше 48 метров.

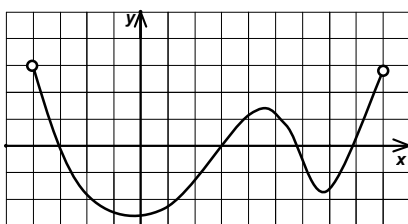
8. Пассажирский электропоезд «Ласточка» длиной 300 м движется со скоростью 100 км/ч. Навстречу ему движется товарный поезд длиной 600 м со скоростью 80 км/ч. Сколько секунд пройдет от момента встречи машинистов поездов до момента расставания хвостовых вагонов?
9. На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(12)$.



10. В ящике девять красных и семь синих фломастеров. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?
11. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке $[-4; 1]$.

Вариант III

1. Решите уравнение $8^{9-x} = 64^x$.
2. Ваня любит математику. Изучая собственные результаты пробных экзаменов, он установил, что решит на очередном пробном ЕГЭ более 16 задач с вероятностью 0,76, а более 15 задач — с вероятностью 0,88. Какова, согласно этим данным, вероятность того, что он решит ровно 16 задач?
3. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = 3/5$, $AC = 4$. Какова длина AB ?
4. Вычислите значение $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{51}}{10}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
5. Прямоугольный параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите его площадь поверхности.
6. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 9)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе напишите длину наибольшего из них.

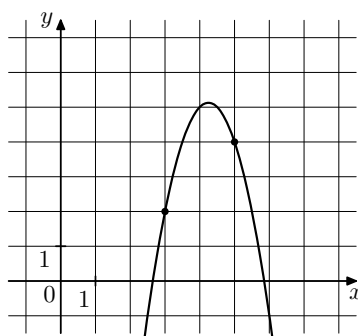


7. Катапульта метает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{110} \text{ м}^{-1}$, $b = \frac{13}{11}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 19 метров нужно расположить катапульти, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

8. Вновь задача про насосы. Первый наполняет бак за 19 минут, второй — за 57 минут, а третий — за 1 час и 16 минут. За сколько минут они наполнят бак, работая одновременно?
9. На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx - 31$. Найдите $f(2)$.



10. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что потребовалось сделать три броска? (Ответ округлите до сотых.)
11. Найдите точку максимума функции $y = (60 - x)e^{x+60}$.

Вариант IV

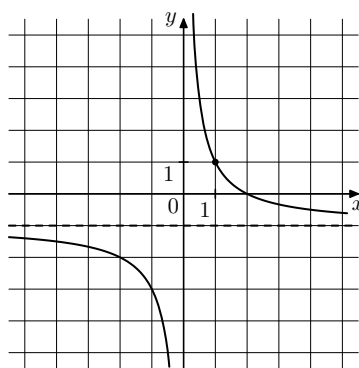
1. Решите уравнение $\sqrt{2x-3} = 13$.
2. Вероятность того, что китайский чайник, заказанный с «AliExpress», прослужит хотя бы 3 года не так уж и велика: 0,47. Какова в таком случае вероятность того, что он прослужит меньше трех лет?
3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH . $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $AC = 4$. Найдите $2\sqrt{5}AH$.
4. Найдите значение выражения: $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + 1$.
5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины ребер $AB = 5$, $AD = \sqrt{3}$, $CC_1 = 2\sqrt{2}$. Найдите длину диагонали параллелепипеда AC_1 .
6. Прямая $y = 2x + 1$ является касательной к графику функции $y = x^2 - 2x - c$. Найдите c .
7. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию некоторого предприятия от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 100 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле

$$r(p) = q \cdot p.$$

Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка составит не менее 160 тыс. руб. Ответ укажите в тыс. руб.

8. Знакомый нам электропоезд «Ласточка», двигаясь равномерно со скоростью 120 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой 300 м, за 15 с. Найдите длину поезда, ответ выразите в метрах.

9. На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите $f(20)$.

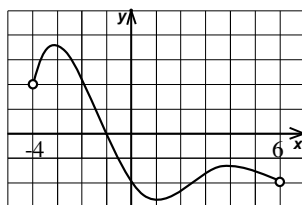


10. Симметричную монету бросают 12 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 4 орла» меньше вероятности события «выпадет ровно 5 орлов»?

11. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2 + 576}{x}$.

Вариант V

1. Решите уравнение $0,5^{x-6} = 8^x$.
2. Василий выигрывает у своего телефона на сложном уровне с вероятностью $0,65$, если играет белыми фигурами, и $0,6$ — черными. Какова вероятность того, что он выиграет две партии подряд, если после каждой партии цвет фигур меняется?
3. Периметр равнобедренной трапеции равен 40 . А ее основания равны 12 и 18 . Найдите площадь трапеции.
4. Вычислите значение $\frac{(3\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{16 - \sqrt{60}}$.
5. В цилиндрический сосуд налили 3000 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 20 см . В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 3 см . Чему же равен объем детали? Ответ выразите в см^3 .
6. На рисунке изображен график функции $f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



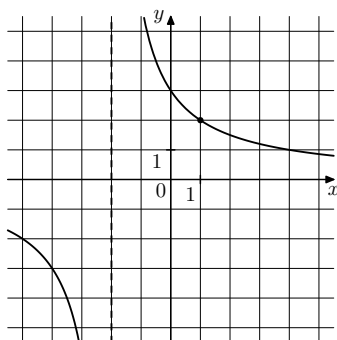
7. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется формулой

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком значении угла α (в градусах) время полета составит $2,3$ секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 23 \text{ м/с}$? Примите $g = 10 \text{ м/с}^2$.

8. Из городов A и B навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в B на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в A , а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из B в A велосипедист?

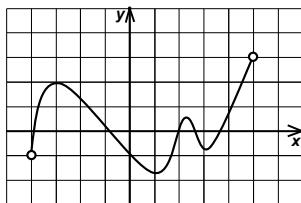
9. На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x+a}$. Найдите значение x , при котором $f(x) = -0,3$.



10. В викторине участвуют 5 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двух играх победила команда A . Какова вероятность того, что эта команда выиграет третий раунд?
11. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+4)^9 - 9x$ на отрезке $[-3, 5; 0]$.

Вариант VI

1. Решите уравнение $(x - 3)^3 = 8$.
2. В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменов: 22 из США, 16 из Мексики, остальные из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.
3. Площадь параллелограмма равна 36, две его стороны равны 12 и 24. Найдите большую высоту этого параллелограмма.
4. Найдите значение выражения $\sqrt{18} \cos^2 \frac{7\pi}{8} - \sqrt{18} \sin^2 \frac{7\pi}{8}$.
5. Найдите угол AC_1C прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, для которого $AB = 8$, $AD = 15$, $AA_1 = 17$. Ответ дайте в градусах.
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



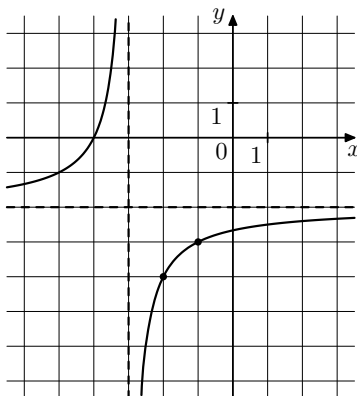
7. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 108$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого обогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление задается формулой

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \text{ (Ом)},$$

а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 60 Ом. Ответ выразите в омах.

8. Расстояние между городами A и B равно 510 км. Из A в B со скоростью 70 км/ч выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из B выехал со скоростью 80 км/ч второй. На каком расстоянии (в км) от города A они встретятся?

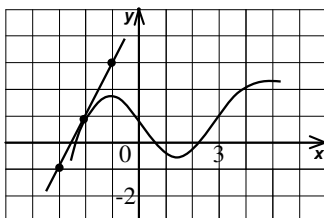
9. На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{kx + a}{x + b}$. Найдите k .



10. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 11 очков. Найдите вероятность того, что во второй раз выпало 5 очков.
11. Найдите наименьшее значение функции $y = -8x + 4 \operatorname{tg} x + 2\pi + 1$ на отрезке $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$.

Вариант VII

1. Решите уравнение $17^{2x+3} = \left(\frac{1}{289}\right)^x$.
2. Стрелок стреляет (стрелами) в мишень три раза. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок промахнется все три раза.
3. В параллелограмме $ABCD$ высота, опущенная на сторону AB , равна 12, $AD = 13$. Найдите $13 \sin B$.
4. Найдите значение выражения $\frac{21 \sin 113^\circ \cos 113^\circ}{\sin 226^\circ}$.
5. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π , а его высота равна 4. Найдите диаметр основания цилиндра.
6. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите $f'(x_0)$.



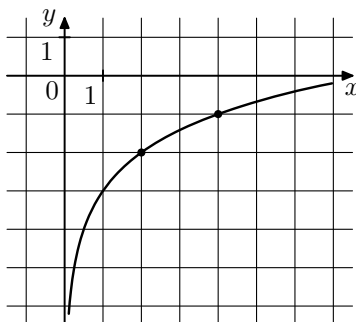
7. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 30$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 6$ м/с². За t секунд после начала торможения он проходит путь

$$S = v_0 t - \frac{at^2}{2} \text{ (м)}.$$

Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 48 метров. Ответ выразите в секундах.

8. Теперь автомобиль из предыдущей задачи двигался половину времени со скоростью 80 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути. Ответ дайте в км/ч.

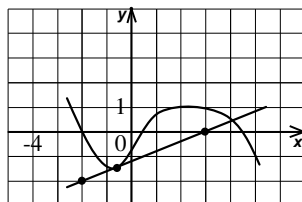
9. На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f\left(\frac{1}{8}\right)$.



10. При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 2 очка?
11. Найдите наименьшее значение функции $y = 7x - 7 \ln(x + 5) + 3,8$ на отрезке $[-4, 9; 0]$.

Вариант VIII

1. Решите уравнение $\log_8(x^2 + x) = \log_8(x + 1)$. Если оно имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.
2. В магазине стоят два платежных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.
3. Центральный угол на 27° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.
4. Найдите значение выражения $3^{3\sqrt{7}-2} \cdot 3^{5+3\sqrt{7}} : 3^{6\sqrt{7}}$.
5. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объем цилиндра равен 36. Чему же равен объем конуса?
6. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите $f'(x_0)$.

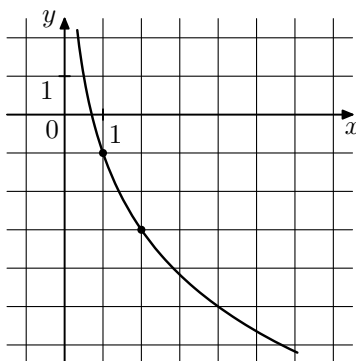


7. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землей, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле

$$l = \sqrt{2Rh},$$

где $R = 6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 48 километров? Ответ выразите в километрах.

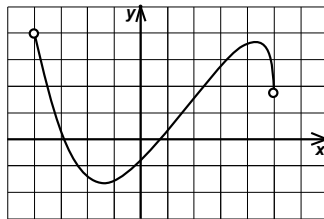
8. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 18 рабочих, а во второй — 22 рабочих. Через 9 дней после начала работы в первую бригаду перешли 3 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.
9. На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 3$.



10. Игральную кость бросили два раза. Известно, что пять очков не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 10».
11. Найдите наибольшее значение функции $y = 20 \sin x - 23x + 24$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Вариант IX

1. Решите уравнение $\log_2(x+1) = 4$.
2. Доля брака при производстве часов составляет 0,4%. Найдите вероятность того, что только что выпущенные с конвейера часы окажутся исправными.
3. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $AH = 16$, $\cos B = 0,6$. Найдите CH .
4. Вычислите значение выражения $\frac{5}{3^{\log_3 5}}$.
5. Объем треугольной пирамиды $SACE$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 3. Найдите объем шестиугольной пирамиды.
6. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на промежутке $(-4; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $y = f(x)$.

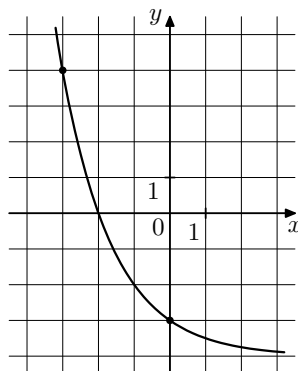


7. При нормальном падении света длиной волны $\lambda = 400$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением

$$d \sin \varphi = k\lambda.$$

Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решетке с периодом, не превосходящим 1600 нм?

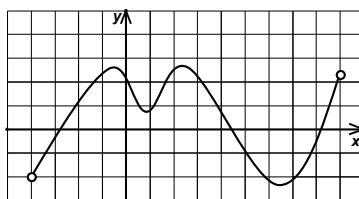
8. Бригада оптимистичных рабочих должна изготовить 200 деталей. Изготавливая ежедневно на 5 деталей больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на 2 дня раньше срока. Сколько дней бригада затратила на выполнение заказа?
9. На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(-5)$.



10. В одном ресторане в г. Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в «Шеп-беш»: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплимент? Результат округлите до сотых.
11. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 4$ на отрезке $[-2; 2]$.

Вариант X

1. Решите уравнение $(x - 9)^2 = -36x$.
2. Игральную кость бросают трижды. Найдите вероятность того, что в сумме за три попытки выпадет менее 17 очков. Ответ округлите до сотых.
3. В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, высота AH равна 25, угол C равен 30° . Найдите отрезок AC .
4. Найдите значение выражения $46 \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \operatorname{tg} 83^\circ$.
5. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.
6. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3; 6]$.

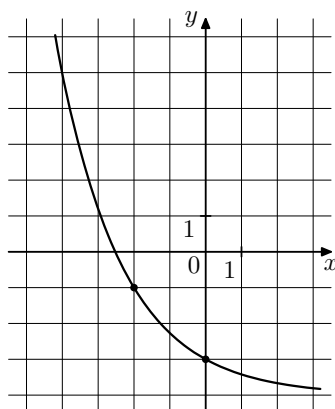


7. Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч². Скорость v вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la},$$

где l — пройденный автомобилем путь в км. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,8 километра, приобрести скорость 120 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

8. Баржа вышла в 10:00 из пункта A в пункт B , расположенный в 15 км от A . Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00 того же дня. Определите скорость течения реки (в км/ч), если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.
9. На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 23$.



10. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 5. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.
11. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 5x + 5)e^{7-x}$.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ

1. Билет с шестизначным номером называется счастливым, если сумма первых трех цифр его номера совпадает с суммой последних трех цифр. Сколько существует счастливых шестизначных билетов?
2. Можно ли, используя формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, придумать алгоритм извлечения квадратного арифметического корня?
3. Докажите, что основания трех высот треугольника, середины трех его сторон и середины трех отрезков, соединяющих вершины треугольника с ортоцентром (точкой пересечения высот), лежат на одной окружности.
4. Сколько двумерных граней у четырехмерного гиперкуба? Сколько шестимерных граней у семи-мерного гиперкуба?
5. Разбивает ли граница трехмерного шара (сфера) четырехмерное пространство на две части? Как, пользуясь четвертым измерением, сделать из правой перчатки левую?
6. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой l . Где поставить точку M на прямой l , чтобы сумма $AM + MB$ была минимальна?
7. Что такое число π и как вычислить его знаки, не пользуясь калькулятором?
8. Существует ли такая функция $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \dots$, график которой в точности совпадает с графиком функции $f(x) = e^x$.
9. На плоскости существует бесконечно много правильных многоугольников. А сколько существует правильных многогранников в трехмерном пространстве?
10. Что больше: e^π или π^e ?
11. (*Задача Ферма-Торричелли*) Найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника наименьшая.
12. (*Теорема Помпею*) На описанной окружности правильного треугольника отметили точку P . Докажите, что сумма расстояний от точки P до некоторых двух вершин треугольника равна расстоянию от нее до третьей вершины.
13. (*Первая теорема Тебо*) На сторонах параллелограмма извне построили квадраты. Докажите, что центры этих четырех квадратов образуют также квадрат.
14. (*Задача Фаньяно*) На каждой из сторон данного треугольника требуется отметить по одной точке. Как именно это следует сделать, чтобы периметр треугольника с вершинами в отмеченных точках был минимальным?
15. В прямоугольнике 3×4 расположено шесть точек. Всегда ли найдутся ли среди них две, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$?
16. Первоклассница Маша знает только цифру 1. Может ли она написать число, делящееся на 2021?
17. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых есть преступник и свидетель. Каждый день детектив может пригласить к себе нескольких из этих 80 человек. Если среди приглашенных есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Может ли Ниро Вульф заведомо раскрыть дело за 12 дней?

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Математический анализ

1. Найдите горизонтальную асимптоту графика функции $f(x) = \frac{k}{x} + m$.
2. Найдите горизонтальную асимптоту графика функции $f(x) = \frac{kx + a}{x + b}$.
3. Найдите вертикальную асимптоту графика функции $f(x) = \frac{k}{x + a}$.
4. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$.
5. Докажите, что $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
6. Что больше: e^π или π^e ?
7. Вычислите $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ при $\alpha > 0$.
8. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}$.
9. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.
10. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right)^{\frac{1}{2 \ln x}}$.
11. Докажите, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ расходится.
12. Вычислите интеграл $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx$.
13. Разложите функцию $f(x) = e^x$ в ряд Тейлора.
14. (Формула Эйлера) Докажите, что $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.
15. (Тождество Эйлера) Докажите, что $e^{i\pi} + 1 = 0$.
16. Докажите равенство $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
17. (Неравенство Бернулли) Докажите неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$ верно при всех $n \in \mathbb{N}$ и $x > -1$.
18. (Неравенство Коши) Докажите по индукции, что для неотрицательных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ верно неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Комбинаторика и теория графов

1. Докажите формулу Эйлера для плоских графов: $V - P + \Gamma = 2$.
2. Сколько шестимерных граней у семимерного гиперкуба?
3. Сколько существует различных перестановок из n элементов?
4. Сколькими способами можно выбрать k элементов из n -элементного множества?
5. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых есть преступник и свидетель. Каждый день детектив может пригласить к себе нескольких из этих 80 человек. Если среди приглашенных есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Может ли Ниро Вульф заведомо раскрыть дело за 12 дней?

6. Докажите, что площадь многоугольника с целыми вершинами и без самопересечений определяется формулой

$$S = i + \frac{b}{2} - 1,$$

где i — количество целых точек внутри фигуры, b — количество целых точек на ее границе.

Алгебра

1. Решите уравнение $z^2 - (7 + i)z + 24 + 7i = 0$.
2. Найдите наименьшее значение $|z|$, если известно, что $|z - 4 - 7i| = |z + 4 - i|$.
3. Докажите изоморфность группы симметрий правильного треугольника и группы перестановок из трех элементов ($D_3 \cong S_3$).
4. Приведите пример поля, состоящего из двух элементов.

Теория чисел

1. (Малая Теорема Ферма) Пусть a — целое число, p — простое. Докажите, что $a^p \equiv a \pmod{p}$.
2. Представьте число $\sqrt{24}$ в виде цепной дроби.
3. Найдите формулу для вычисления суммы $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.
4. Найдите формулу для вычисления суммы $\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.
5. Найдите формулу для вычисления суммы $\sum_{k=1}^n T_k = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots + T_n$.
6. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

Выпуклый анализ

1. (Неравенство Йенсена) Пусть $y = f(x)$ — функция, выпуклая вниз на некотором интервале; x_1, x_2, \dots, x_n — числа из этого интервала; m_1, m_2, \dots, m_n — положительные числа, сумма которых равна единице. Тогда выполнено неравенство

$$m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \dots + m_n f(x_n) \geq f(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n).$$

2. (Неравенства о средних) Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — положительные числа, тогда

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}},$$

причем равенство достигается только при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

3. (Неравенство Коши-Буняковского) Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ — положительные числа. Тогда

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2.$$

4. (Неравенство Гёльдера) Пусть p, q — положительные числа, причем $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n верно неравенство

$$(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

ПО СТОПАМ ЭЙЛЕРА

1. Докажите формулу Эйлера для плоских графов: $V - P + \Gamma = 2$.
2. (Формула Эйлера) Докажите, что $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.
3. (Тождество Эйлера) Докажите, что $e^{i\pi} + 1 = 0$.
4. (Формула Эйлера) Пусть R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника с центрами в точках O и I . Докажите, что $OI^2 = R^2 - 2Rr$.
5. (Формула Эйлера, внешний случай) Пусть R и r_a — соответственно радиусы описанной и вневписанной окружностей треугольника с центрами в точках O и I_a . Докажите, что $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$.
6. (Окружность Эйлера) Докажите, что основания трех высот треугольника, середины трех его сторон и середины трех отрезков, соединяющих вершины треугольника с ортоцентром, лежат на одной окружности.
7. (Прямая Эйлера) Докажите, что точка пересечения медиан треугольника лежит на прямой, проходящей через центр описанной окружности и ортоцентр треугольника.
8. (Базельская проблема) Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Сколько вершин, ребер, двумерных граней и ячеек (трехмерных граней) у четырехмерного гиперкуба?
2. Разбивает ли граница трехмерного шара (сфера) четырехмерное пространство на две части?
3. Как, пользуясь четвертым измерением, сделать из правой перчатки левую (не выворачивая ее наизнанку)?
4. Могут ли двумерные плоскости пересекаться по точке в четырехмерном пространстве?
5. $ABCDE$ — правильный гипертетраэдр. Пространство Ω проходит через точки K , L , L_1 и M_1 — середины ребер AB , BC , CD и DE соответственно.
 - а) Докажите, что сечением гипертетраэдра $ABCDE$ пространством Ω является правильная треугольная призма.
 - б) Найдите угол между гипергранями $ABCE$ и $BCDE$.
6. Центры граней куба служат вершинами правильного октаэдра. А верна ли такая двойственность для четырехмерных гиперкуба и гипероктаэдра?
7. Сколько существует правильных многогранников в четырехмерном пространстве?

ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

1. Толщина кожуры апельсина равна 1 см, а его диаметр — 8 см. Чего в апельсине больше: кожуры или мякоти? (Форму апельсина считать шарообразной.)
2. Представьте, что вы оказались в заснеженном поле, на расстоянии 30 метров к югу от дороги, идущей с запада на восток. В 40 метрах к западу от ближайшей на дороге к вам точки расположен снежокат. За какое наименьшее время вы сможете добраться до снежоката, если скорость передвижения по полю составляет 1 м/с, а скорость передвижения по дороге — 2 м/с? Ответ дайте в секундах.
3. В магазине стоят два платежных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.
4. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 1$.
5. Решите уравнение $\cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x$.

ПОЛЕЗНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

В этой главе воедино собраны ссылки на видеоролики, в которых обсуждаются общие вопросы подготовки к экзаменам и не только: литература, организационные моменты, полезные ресурсы и приемы.

- [Олимпиады. Часть 1](#)
- [Олимпиады. Часть 2](#)
- [Олимпиады. Часть 3](#)
- [Первая часть ЕГЭ](#)
- [Вторая часть ЕГЭ](#)
- [Теория чисел](#)
- [Задачи с параметром](#)
- [«Экономические» задачи](#)
- [Планиметрия](#)
- [Стереометрия](#)
- [10 000 задач по геометрии](#)
- [Материалы для подготовки к ДВИ в МГУ](#)
- [Как сберечь время на ЕГЭ?](#)
- [Как извлекать корни в столбик?](#)
- [Как не делать глупых ошибок?](#)
- [Материалы по высшей математике](#)
- [Опыт сдачи ЕГЭ](#)

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Здесь приведены варианты вступительных испытаний в Московский университет для самостоятельного решения. Они схожи с заданиями на страницах 5–17: различия преимущественно в числовых данных. В вариантах 2020–2021 годов условия отличаются, но зачастую их объединяет одна идея. Ответы к задачам вы найдете в конце этого раздела.

ДВИ-2021

Вариант 3

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{3 \sin \frac{\pi}{2}}{\log_2 16} - \sqrt{\frac{4}{9}}\right)^{-1}$.
2. Автовладелец Авдей продал автосалону свой автомобиль за 60% его первоначальной стоимости. Автосалон выставил на продажу этот автомобиль за цену, на 20% большую уплаченной Авдею. Какова доля получившейся цены по отношению к первоначальной?
3. Решите уравнение $2 \cdot \frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \sqrt{3} \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 x)$.
4. Решите неравенство $\log_{x-1}(x+1) - \log_{\sqrt{x+1}}(x-1) \geq 1$.
5. В четырёхугольник $ABCD$ площади 2 вписана окружность, касающаяся сторон AB и CD в точках K и L соответственно. Отрезок KL пересекает диагональ AC в точке M . Найдите BD , если известно, что $AM = MC = 1$.
6. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\sin^6 x + \cos^6 x + a \cdot \sin 2x \geq a^2$$

выполняется для всех действительных x .

7. Вписанная в треугольную пирамиду $ABCD$ сфера касается граней BCD , ACD , ABD и ABC в точках A_1 , B_1 , C_1 и D_1 соответственно. Известно, что D_1 является точкой пересечения высот треугольника ABC , что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны и что радиус окружности, описанной около треугольника ABC , в четыре раза больше радиуса окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите отношение, в котором сфера делит отрезок DD_1 , считая от вершины D .

Вариант 4

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \frac{2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}\right)^2$.
2. Бобр доплывает от своей норы вниз по реке до осиновой рощи за три минуты. Подкрепившись, он плывёт обратно к своей норе, на что у него уходит четыре минуты. Во сколько раз собственная скорость бобра превышает скорость течения? (Собственную скорость бобра считать постоянной).
3. Решите уравнение $\cos 4x + \cos 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.
4. Решите неравенство $\log_2 x + \log_3 x \leq \log_2 3 \cdot \log_x 6$.
5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Известно, что $AB = BC = 1$, что площади треугольников AKC и BCL равны и что около четырёхугольника $AKML$, где M — точка пересечения отрезков BL и CK , можно описать окружность. Найдите все возможные значения AC .
6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\left(\sqrt{3+2x-x^2} - \sqrt{3-2x-x^2}\right) \left(\sqrt{a-x^2} - \sqrt{3-2x-x^2}\right) \left(\sqrt{a-x^2} - \sqrt{3+2x-x^2}\right) = 0$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что центр сферы, описанной около этого тетраэдра, лежит на AB , что плоскости ABC и ABD перпендикулярны и что $AD = DC = CB$. Найдите угол между прямыми AD и CB .

Вариант 5

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\frac{27^{1/3}}{25^{1/2}} + \frac{\log_5 25}{3\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4}} + \frac{41}{15}$.
2. Любитель коктейлей Игнат смешал 300 мл морковного сока с 200 мл сливок. Тщательно перемешав полученную смесь, Игнат попробовал её на вкус и решил, что сливок оказалось слишком много. Игнат налил в полулитровый графин 200 мл морковного сока, а оставшиеся 300 мл заполнил приготовленной смесью. Каково процентное содержание сливок в полученном напитке?
3. Решите уравнение $4 \sin 2x \cos 3x - 2 \sin 5x = \operatorname{tg} 2x$.
4. Решите неравенство $\log_{x-1} (4^{\log_3 x} - 6x^{\log_3 2} + 10) \leq 0$.
5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD . Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD , касаются диагонали AC в одной и той же точке. При этом точка касания первой окружности со стороной BC делит эту сторону пополам. Найдите отношение, в котором точка касания второй окружности со стороной AD делит эту сторону, считая от точки A .
6. Найдите все пары действительных чисел (x, y) с наименьшим возможным значением y , удовлетворяющие неравенству

$$\log_{x^2-y} \left(x - y^2 + \frac{7}{4} \right) \geq 1.$$

7. Сфера касается всех рёбер тетраэдра $ABCD$. Известно, что произведения длин скрещивающихся рёбер равны. Известно также, что $AB = 3$, $BC = 1$. Найдите AC .

Вариант 6

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \sin \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \right)^4 - \frac{1}{4}$.
2. Футболист Федот сыграл в трёх матчах на чемпионате. Премияльная выплата Федота за второй матч в связи с отличной игрой была на n процентов больше, чем за первый. В третьем же матче Федот не сумел показать хорошую игру, и его премия за этот матч оказалась на n процентов меньше, чем за второй матч. Найдите n , если известно, что премия за третий матч составила 64% от премии за первый матч.
3. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x = \frac{2}{3} \cos x$.
4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x-1}} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 5} \leq 2$.
5. Окружность Ω_1 с центром O_1 пересекает окружность Ω_2 с центром O_2 в точках A и B . При этом точки O_1 и O_2 лежат вне Ω_2 и Ω_1 соответственно. Касательная к окружности Ω_2 в точке A пересекает Ω_1 в точках A и C . Касательная к окружности Ω_1 в точке A пересекает Ω_2 в точках A и D . Найдите угол между прямыми O_1C и O_2D , если известно, что $\angle AO_1B = 36^\circ$ и $\angle AO_2B = 64^\circ$.
6. Найдите все пары действительных чисел (x, y) , удовлетворяющих равенству

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin(1 + \log_2(x^2 + y^2)) = 1 + \log_2(xy).$$

7. Дан параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$ с основаниями $ABCD$, $A' B' C' D'$ и боковыми рёбрами AA' , BB' , CC' , DD' . Все рёбра параллелепипеда равны. Плоские углы при вершине B также равны. Известно, что центр сферы, описанной около тетраэдра $AB' C D'$, лежит в плоскости $AB' C$. Радиус этой сферы равен 2. Найдите длину ребра параллелепипеда.

ДВИ-2020

Вариант 4

1. Найдите целое число, задаваемое выражением $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}+1}\right) \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)$.
2. Дана арифметическая прогрессия. Ее двадцатый член равен 1, а член с номером 2000 равен 199. Найдите член этой прогрессии с номером 2020.
3. Решите уравнение $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$.
4. Решите неравенство $\log_x(\log_{\sqrt{x}}(10x - 4 - 4x^2)) \geq \log_{\sqrt{x}}(\log_x(10x - 4 - 4x^2))$.
5. Окружность, проходящая через вершины A и B прямоугольника $ABCD$, пересекает сторону BC в точке E , а диагональ AC — в точке F . Найдите площадь четырехугольника $ABEF$, если $BE = 8$, $EC = 4$, а точки D, F, E лежат на одной прямой.
6. Дана правильная треугольная пирамида. Известно, что центр сферы, описанной около этой пирамиды, равноудален от боковых ребер и от плоскости основания пирамиды. Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, если длина ребра ее основания равна 12.
7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$2x^2y^2 + x^2y + xy^2 + (1-a)(x^2 + y^2) - a(x + y + 2) = 0$$

имеет ровно одно решение (относительно (x, y)).

Вариант 5

1. Найдите целое число, ближайшее к числу $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$.
2. Дана геометрическая прогрессия. Ее четвертый член равен 5, а член с номером 54 равен 160. Найдите член этой прогрессии с номером 64.
3. Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 2 \cos 2x = 2$.
4. Решите неравенство $8 + \log_{\sqrt{x}} 8 \leq 4 \log_x \sqrt{17x^2 - 2}$.
5. Произведение оснований трапеции равно 18. Найдите периметр трапеции, если известно, что в нее вписана окружность, а диагонали делят среднюю линию на три равные части.
6. В основании четырехугольной пирамиды $ABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На ребре SB отмечена точка E так, что $SE : EB = 2 : 1$. На ребре SD отмечена точка F так, что $SF : FD = 1 : 2$. Найдите отношение, в котором плоскость AEF делит объем пирамиды.
7. Найдите все положительные значения параметра a , при которых сумма различных корней уравнения

$$\log_2(ax) + \log_2(1-x) = \cos((x-x^2)a\pi)$$

максимальна.

Вариант 6

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{\frac{4^3 + 3^4}{3^4 - 4^3}}$.
2. Сумма первых ста членов арифметической прогрессии равна 750. Найдите член этой прогрессии с номером 99, если известно, что второй член этой прогрессии равен 7.
3. Решите уравнение $\sin x \cos 3x = \sin 3x \cos 5x$.
4. Решите неравенство $2^{\frac{3+5x}{1+2x}} + 2^{\frac{1+3x}{1+2x}} \leq 6\sqrt{2}$.
5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Точки B, C, E, D лежат на одной окружности. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADC , если известно, что $\angle CDE = \angle BAC$ и что радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 1.
6. Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' . Найдите расстояние между прямой, проходящей через середины ребер AB и AA' , и прямой, проходящей через середины ребер BB' и $B'C'$, если ребро куба равно 1.
7. Найдите произведение корней уравнения

$$\sin \frac{x^2 + x + 1}{2x} + \cos \frac{x^2 - x + 1}{2x} = \frac{x^2 - 4x + 1}{x} \cdot \cos \frac{\pi - 2}{4}.$$

ДВИ-2019

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019 \cdot 2031 - 2017 \cdot 2033}$.
2. Найдите $a + b + c$, если известно, что $a + 3b = 2$, $b + 3c = 4$, $c + 3a = 6$.
3. Решите уравнение $5 \sin x + 3 \cos 2x = 4$.
4. Решите неравенство $3^{\log_3^2 x} + 5x^{\log_3 x} < 18$.
5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD : DB = BE : EA = 1 : 5$. Найдите AB , если известно, что площадь треугольника ABC равна 30, а тангенс угла $\angle DCE$ равен 2.
6. Найдите все пары вещественных чисел $(a; b)$, при которых неравенство

$$3a(x+3)^4 + 8b(x-3)^4 \geq x^4 + 54x^2 + 81$$

справедливо для всех вещественных x .

7. Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π . Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что ребра параллелепипеда равны 1, 2, 4.
8. Найдите все x, y из полуинтервала $(-\pi; \pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 28\sqrt{3} \cos x + 7 \cos y + 4\sqrt{6} \cos \frac{x+y}{2} = 12\sqrt{3}, \\ 7 \cos x \cos y + 4\sqrt{6} \cos x \cos \frac{x+y}{2} + \sqrt{2} \cos y \cos \frac{x+y}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{7}. \end{cases}$$

ДВИ-2018

1. Какое из чисел $\frac{49}{32}$ и $\frac{59}{24}$ ближе к 2?

2. Найдите все значения параметра p , при которых разность между корнями уравнения $x^2 + px + 3p^4 = 0$ максимальна.

3. Решите уравнение $\cos 10x \cos 7x = \cos 4x \cos x$.

4. Решите неравенство $(2 + \sqrt{3})^{\log_2 - \sqrt{3} x} \geq (2 - \sqrt{3})^{\log_x (2 + \sqrt{3})}$.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Пусть M — середина отрезка AD , а N — произвольная точка отрезка BC . Пусть K — пересечение отрезков CM и DN , а L — пересечение отрезков MN и AC . Найдите все возможные значения площади треугольника ABL , если известно, что $AD : BC = 5 : 2$, а площадь треугольника DMK равна 5.

6. Найдите все значения параметра p , при которых система

$$\begin{cases} px^2 + 6px - 12y + 11p + 18 \leq 0, \\ py^2 - 2py - 12x + 3p - 30 \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$ с боковыми рёбрами AA' , BB' , CC' и DD' . На рёбрах AB , BC , CD , DA нижнего основания отмечены соответственно точки K , L , M , N , таким образом, что $AK : KB = 7 : 9$, $BL : LC = 2 : 1$, $CM : MD = 3 : 1$, $DN : NA = 2 : 1$. Пусть P , Q , R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$ соответственно. Найдите PQ , если известно, что $QR = 1$ и $AB : BC = 4 : 3$.

8. Найдите все пары чисел x , y из промежутка $(0; \frac{\pi}{2})$, при которых достигается минимум выражения $\left(\frac{\sqrt{5} \cos y}{2 \sin(x+y)} + 1 \right) \left(\frac{2 \cos x}{3 \cos y} + 1 \right)^2 \left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{5} \cos x} + 1 \right)^4$.

ДВИ-2017

1. Какое число больше: $\sqrt{\frac{7}{8} + 7 + \frac{8}{7}}$ или 3?
2. Известно, что $a + b + c = 6$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 16$. Найдите $ab + bc + ac$.
3. Решите уравнение $\cos 6x + \cos 5x = \sin x$.
4. Решите неравенство $x^2 \log_6^2 x + 6 \log_5^2 x \leq x \log_6 x \cdot \log_5 x^5$.
5. Через вершины K и L треугольника KLM проведена окружность, касающаяся прямых KM и LM . На этой окружности выбрана точка S (внутри треугольника), лежащая на расстоянии 1 от прямой KL . Найдите расстояние от точки S до прямой LM , если известно, что $\angle KLS = \angle LMS$ и что $\angle SLM = 45^\circ$.
6. Анатолий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добраться вверх по реке до пункта B , причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Анатолий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A . Однако, промчавшись 8 км, Анатолий заметил на берегу машущего ему рукой Бориса, который просил по старой дружбе довезти его до пункта C . И хоть пункт C Анатолий уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Анатолий с Борисом встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Анатолия, откуда те крикнули, что пункт B уже совсем близко и чтобы Анатолий нигде не задерживался. Доставив Бориса в пункт C , Анатолий немедленно помчался догонять друзей. Определите, какую долю пути оставалось пройти друзьям Анатолия от момента встречи с ним и Борисом, если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, расстояние между пунктами B и C равно 2 км, скорости катеров постоянны, а Анатолий действительно нигде не задерживался.
7. Из вершины S на плоскость основания KLM пирамиды $KLMS$ опущена высота SH . Найдите объём этой пирамиды, если известно, что площади треугольников $\triangle HLM$, $\triangle HKM$, $\triangle HKL$ равны соответственно $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{2}$ и что все три плоских угла при вершине S прямые.
8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{\sin(x^2 - y^2)} + y \cdot \operatorname{ctg}(x^2 - y^2) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}, \\ \frac{y}{\sin(x^2 - y^2)} + x \cdot \operatorname{ctg}(x^2 - y^2) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

ДВИ-2016

1. Найдите $f\left(\frac{7}{3}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{5}{3}$.
2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 10 = 0$ равна 7. Найдите все возможные значения a .
3. Решите уравнение $8 \cos^2 x + \sin 2x = 3 + 2 \cos 2x$.
4. Решите неравенство $\log_{1-\log_x 2}(1 + \log_2^2 x) \leq 1$.
5. Две окружности касаются внутренним образом в точке A . Хорда BC внешней окружности касается внутренней окружности в точке D . Прямая AD пересекает внешнюю окружность в точках A и E . Найдите BE , если известно, что $EC = CA$, площадь четырёхугольника $ABEC$ равна $3\sqrt{3}$, а радиусы окружностей относятся как $2 : 3$.
6. Ровно в $10:00$ из пункта A в пункт B выехала маршрутка. Проехав треть пути, наблюдательный водитель маршрутки заметил, что мимо него в сторону пункта A проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда маршрутка прибыла в пункт B , из пункта B в пункт A выехал грузовик. Когда до пункта A оставалась шестая часть пути, не менее наблюдательный водитель грузовика заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приехал грузовик в пункт A , если известно, что велосипедист прибыл в пункт A ровно в $15:00$? Скорости велосипедиста, маршрутки и грузовика считать постоянными.
7. В основании правильной пирамиды с вершиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 5. Плоскость π параллельна ребру KL , перпендикулярна плоскости NOV и пересекает ребро LM в точке T так, что $LT : TM = 3 : 2$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость LMV и плоскость основания, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани MNV .
8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{13 + \log_a^2 \cos \frac{x}{a} + \log_a \cos^4 \frac{x}{a}} + \sqrt{97 + \log_a^2 \sin \frac{x}{a} - \log_a \sin^8 \frac{x}{a}} + \sqrt{20 + \log_a^2 \operatorname{tg} \frac{x}{a} + \log_a \operatorname{tg}^4 \frac{x}{a}}$$

и все пары (a, x) , при которых оно достигается.

ДВИ-2015

1. Найдите $f(3)$, если $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{5}{x} + \frac{7}{12}$.
2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 9x - 2 = 0$.
3. Решите неравенство $\sin x + \sqrt{\frac{2}{3}} \cos 2x + \cos x \leq 0$.
4. Решите уравнение $\log_{\sqrt{x+1}} |4x - 1| = 4 \log_{|4x-1|} \sqrt{x+1}$.
5. Окружность радиуса 2 касается середины стороны AC треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L так, что $BK = KL = LC$. Чему может равняться AB , если $\angle ABC = 45^\circ$?
6. Лыжник Григорий ехал по довольно пологому склону, но, проехав две трети пути, проявил неуклюжесть и сломал лыжи. Отбросив их за ненадобностью, он тут же побрёл обратно. В момент поломки с вершины горы стартовал лыжник Василий и, проехав 800 метров, встретил Григория. Найдите длину трассы, если известно, что Василий закончил спуск ровно тогда, когда Григорий добрался до вершины горы. Скорости лыжников и пешехода считать постоянными.
7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC , $A'B'C'$ и ребрами AA' , BB' , CC' вписана сфера радиуса $\sqrt{21}$. Найдите расстояние между прямыми $A'K$ и $B'L$, где K и L — точки, лежащие на AB и BC соответственно, и $AK : KB = BL : LC = 2 : 3$.
8. Найдите все пары (x, y) , при которых достигается минимум выражения

$$\frac{2 - \cos x}{2 - \cos 2x} + \frac{2 - \cos 2x}{(y^2 + 1)^2} + \frac{(y^2 + 1)^2}{|y| + 1} + \frac{|y| + 1}{2 - \cos x}.$$

ДВИ-2014

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/3}(x^2 + 4x + 31)$.
3. Найдите все положительные x , удовлетворяющие неравенству $x^{-5x-3} < x^{-7}$.
4. Решите уравнение $\sin^2 x + \sqrt{2}|\sin x| \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0$.
5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A . Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите CO_2 , если известно, что $LO_1 = 2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.
6. Найдите все x, y на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{1}{\sin^3 x} = 16, \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y = 6. \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{7}$. Найдите расстояние между большей диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.
8. Пусть

$$f(x, y) = \sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y,$$

$$g(x, y) = -\sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

ДВИ-2013

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 3. Один из его корней равен $4/3$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = -2$.
2. Вычислите $\log_8 10 \cdot \log_{10} 4$.
3. Решите неравенство $15(4 + 4^{-2x})^{-\frac{1}{2}} - (4^{1+2x} + 1)^{\frac{1}{2}} \geq 20^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{x}{5}}$.
4. Решите уравнение $\frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 3x} + \frac{\cos 2x}{\sin 3x}$.
5. От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 14 км. В 7:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время им навстречу с биостанции вышел катер рыбинспекции. Браконьеры тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. В 7:38, когда браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, рыбинспекторы осознали, что они идут с браконьерами на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно на биостанцию. До биостанции они добрались ровно в тот момент, когда браконьеры выехали за пределы заповедника — в 7:50. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры и рыбинспекторы, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.
6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r , причем $R = 2r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ AC равна 4.
7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC , такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'C'$ верхнего основания (параллельном AC) отмечена точка D так, что $A'D : DC' = 2 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $AB'CD$, если высота призмы равна 1.
8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sin(x - a \ln|x|) = x + 1$ имеет бесконечно много решений.

ДВИ-2012

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\frac{5}{7}$ и $\frac{9}{4}$, а свободный член равен -5 .
2. Вычислите $\log_3 \log_{64} \frac{716}{179}$.
3. Решите неравенство $(4^x - 7 \cdot 2^x + 12) \cdot \sqrt{3^{x+1} - 1} \leq 0$.
4. Решите уравнение $\cos 3x = \cos x - \sqrt{3} \sin x$.
5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $|2y - x| + 2|y + 4| + |x| = 8$.
6. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AC в точках M, N (точка M лежит между точками A и N). Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AM = 1$, $NC = 3$, $AK : KB = 2 : 1$ и $BL : LC = 1 : 4$.
7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $a\sqrt{x+y} = \sqrt{2x} + \sqrt{3y}$ имеет единственное решение (x, y) .
8. В основании пирамиды лежит правильный треугольник ABC со стороной 5, боковые ребра AS , BS , CS пирамиды равны соответственно 7, 7 и 3. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается прямых AC и BC . Найдите высоту цилиндра.

ДВИ-2011

1. Вычислите значение функции $\frac{x^2 - 5}{x - 0,2}$ в точке $x = \frac{9}{4}$.
2. Решите уравнение $(\sin x + \cos x)^2 = 2$.
3. Решите уравнение $\log_3(5 - 2x) = \log_9(5 + x)$.
4. Решите неравенство $\frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{2+3x} - 1} < 1$.
5. Медианы AP и BQ треугольника ABC пересекаются в точке D . Найдите длину отрезка AB , если $CD = \sqrt{12}$ и известно, что вокруг четырехугольника $PCQD$ можно описать окружность.
6. Найдите наибольшее значение функции $\frac{6^x}{9^{x+1} + 6^x + 4^{x-1}}$ и точку x , в которой это значение достигается.
7. Внутри куба с ребром 3 расположены две сферы. Первая касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Вторая сфера касается тех же двух боковых граней, грани куба, параллельной основанию, и первой сферы. Чему равен радиус второй сферы, если радиус первой равен 1?
8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy + 12y^2 \leq 1, \\ 5x + 6y \leq -3. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ

ДВИ-2021

Вариант 3

1. 12 2. 72 % 3. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ 4. $(1; \sqrt{2}] \cup (2; 3]$ 5. 2 6. $\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$ 7. 1 : 2

Вариант 4

1. 3 2. В 7 раз 3. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ 4. $(0; \frac{1}{3}] \cup (1; 3]$ 5. 1 6. $[0; 1) \cup \{3\} \cup (5; +\infty)$ 7. 60°

Вариант 5

1. 4 2. 24% 3. $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ 4. $(1; 2) \cup \{3^{\log_2 3}\}$ 5. $(3 + 2\sqrt{3}) : 1$ 6. $(\frac{1}{2}; -1)$ 7. 3

Вариант 6

1. 2 2. 60% 3. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ 4. $(3; 4) \cup [7; +\infty)$ 5. 30° 6. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$
7. $\sqrt{5}$

ДВИ-2020

Вариант 4

1. 4 2. 201 3. $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ 4. $(\frac{1}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{5}] \cup [\frac{5+\sqrt{5}}{5}; \frac{5+\sqrt{5}}{4})$ 5. $22\sqrt{3}$ 6. $\sqrt{13} - 1$ 7. 0

Вариант 5

1. 3 2. 320 3. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ 4. $(\sqrt{\frac{2}{17}}; \sqrt{\frac{1}{8}}] \cup (1; \sqrt{2}]$ 5. 18 6. $\frac{1}{6}$ 7. $(8; +\infty)$

Вариант 6

1. 2 2. 8 3. $\frac{\pi n}{4}, \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ 4. $(-\infty; -\frac{3}{4}]$ 5. 1 6. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 7. 1

ДВИ-2019

1. 5 2. 3 3. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ 4. $(\frac{1}{3}; 3)$ 5. 12 6. $\begin{cases} a \geq \frac{1}{6}, \\ b \geq \frac{1}{16} \end{cases}$ 7. 25 : 17

8. $\begin{cases} x = \pm \arccos \frac{1}{7}, \\ y = \pm \arcsin \frac{1}{7} \end{cases}$

ДВИ-2018

1. Второе 2. $\pm \frac{1}{2\sqrt{6}}$ 3. $\frac{\pi k}{6}, \frac{\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}$ 4. $(0; 2 - \sqrt{3}) \cup (1; 2 + \sqrt{3})$ 5. 4 6. 3 7. $\frac{4}{3}$

8. $\begin{cases} x = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

ДВИ-2017

1. Первое 2. 10 3. $\pi + 2\pi k, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$ 4. $\{1\} \cup [2 \log_5 6; 3 \log_5 6]$ 5. $\sqrt{\frac{5}{2}}$

6. Пятую часть пути от А до В 7. $\frac{\sqrt[4]{75}}{15}$ 8. $\begin{cases} x = 7\sqrt{\frac{\pi}{6}}, \\ y = -2\sqrt{2}\pi \end{cases}$

ДВИ-2016

1. $\frac{41}{12}$ 2. ± 3 3. $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \arctg 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ 4. $[\frac{1}{2}; 1) \cup (2; +\infty)$ 5. 2 6. В 13:00 7. $4\sqrt{2}$

8. $8\sqrt{5}, \begin{cases} a = 2, \\ x = \frac{\pi}{2} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

ДВИ-2015

1. 3 2. 85 3. $\left[-\frac{13\pi}{12} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{7\pi}{12} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$ 4. $-\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{-3 + \sqrt{41}}{8}$
 5. $3 \pm \sqrt{7}$ 6. 2 км 7. $\frac{15}{2}$ 8. $\begin{cases} x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ y = 0 \end{cases}$

ДВИ-2014

1. 1 2. -3 3. $\left(0; \frac{4}{5}\right) \cup (1; +\infty)$. 4. $\frac{9\pi}{4} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$ 5. 4 6. $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$ 7. $\frac{\sqrt{7}}{6}$ 8. $[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$

ДВИ-2013

1. $-\frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $[-1; 0]$ 4. $\frac{\pi k}{10}, k \in \mathbb{Z} \setminus (2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z})$ 5. 4 6. $\sqrt{17} - 1$ 7. $\left(1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{11}}{3} + \frac{\sqrt{14}}{3}\right)^{-1}$
 8. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

ДВИ-2012

1. $\frac{28}{9}x^2 - \frac{43}{9}x - 5$ 2. -1 3. $\{-1\} \cup [\log_2 3; 2]$ 4. $\pi k, (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 5. 16 6. $\sqrt{\frac{15}{2}}$
 7. $(-\infty; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$ 8. $\frac{5\sqrt{3}}{26}$

ДВИ-2011

1. $\frac{5}{164}$ 2. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ 3. $\frac{5}{4}$ 4. $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 1\right]$ 5. 6 6. $\frac{1}{4}$ при $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{6}$ 7. $\frac{5 - \sqrt{15}}{2}$
 8. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{12}\right)$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе мы разберем несколько ключевых методов решения тригонометрических уравнений. Попробуйте одолеть задания самостоятельно, а затем осмыслите приведенные решения: формальные выкладки и комментарии к ним. Отбору корней в тригонометрических уравнениях посвящены последние две страницы этой главы, а справочные материалы вы найдете в конце книги. Учтите, что для успеха на экзамене тригонометрические формулы не просто нужно держать в голове — их следует понимать и уметь применять, вас очень продвинет умение выводить эти тождества.

Решите уравнения

1. $\sin^2 x + 4 \sin x + 3 = 0$

2. $5 \sin 3x - 2 \cos^2 3x = -4$

3. $\operatorname{ctg}^4 x - 2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) - 3 = 0$

4. $\sin x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1$

5. $\operatorname{ctg}^2 x + (1 + \sqrt{3}) \operatorname{ctg} x + \sqrt{3} = 0$

6. $2 \operatorname{tg} x \cdot \sin x - \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 8 \sin x - 4\sqrt{2} = 0$

7. $2 \cos x + \sin^2 x = 2 \cos^3 x$

8. $\cos 2x - 2 \cos x + 2 \sin x = 0$

9. $2 \sin x - 3 \cos x = 0$

10. $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$

11. $3 \sin^2 x - 0,5 \sin 2x = 2$

12. $\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x = 0$

13. $\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$

14. $\frac{\cos^2 x + \sin 2x}{\sqrt{\sin x}} = 0$

15. $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$

16. $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$

17. $7 \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos x} + 1 = 0$

18. $\frac{\left(\operatorname{ctg} x + \frac{4}{3} \right) \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\sin x - \frac{3}{4}} = 0$

19. $|\cos x| = 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x$

20. $\log_9(3^{2x} + 5\sqrt{2} \sin x - 6 \cos^2 x - 2) = x$

21. $\frac{\sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$

22. $\begin{cases} 2 \sin x - 5 \cos y = 7, \\ 5 \sin x + \cos y = 4 \end{cases}$

Ответы

1. $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
2. $-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, -\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.
3. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
4. $\pi n, (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
5. $-\frac{\pi}{4} + \pi n, -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
6. $-\arctg 4 + \pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
7. $\pi n, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
8. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
9. $\arctg \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
10. $\frac{\pi}{4} + \pi n, \arctg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
11. $\operatorname{arccctg} \frac{1}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
12. $\pi n, n \in \mathbb{Z}$
13. $\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
14. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi - \arctg \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
15. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
16. $\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
17. $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
18. $-\arctg \frac{4}{3} + 2\pi n, \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
19. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
20. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
21. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
22. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi k\right), n, k \in \mathbb{Z}$

Сведение к квадратным уравнениям**Пример 1**

$$\sin^2 x + 4 \sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Запись $A \Leftrightarrow B$ в нашем случае означает, что множество решений A и множество решений B совпадают, будь то уравнения, неравенства, их системы или совокупности. Последнее звено цепочки равносильных преобразований служит ответом, и отдельно его не дублирую.

Пример 2

$$5 \sin 3x - 2 \cos^2 3x = -4,$$

$$5 \sin 3x - 2(1 - \sin^2 3x) = -4,$$

$$2 \sin^2 3x + 5 \sin 3x + 2 = 0,$$

$$\begin{cases} \sin 3x = -2 \\ \sin 3x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 3x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$$

Используется основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. То, что аргумент у нас $3x$, не помеха: соответствующие серии решений делятся на три. Обратите внимание: для двух различных строчек используется всего лишь одна целочисленная переменная — это полностью корректно, но бывает иначе, и в дальнейшем мы это увидим.

Пример 3

$$\operatorname{ctg}^4 x - 2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) - 3 = 0,$$

$$\operatorname{ctg}^4 x - 2 \operatorname{ctg}^2 x - 3 = 0,$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}^2 x = 3 \\ \operatorname{ctg}^2 x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

По формулам приведения знак у функции должен был смениться, но у нас как был минус, так и остался: его «съел» квадрат тангенса. В нынешнем примере решения двух уравнений удастся записать одной серией, и, если у вас получилась иная форма ответа, просто сверьтесь по тригонометрической окружности.

Пример 4

$$\sin x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1,$$

$$\sin x + 2 \sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x = \sqrt{3} \sin 2x + 1,$$

$$\sin x + \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{3} \sin 2x + 1,$$

$$\sin x + 1 - 2 \sin^2 x = 1,$$

$$\sin x(1 - 2 \sin x) = 0,$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формулы приведения здесь не годятся, так что мы использовали синус суммы аргументов. Корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ записаны в две серии: это наглядно и удобно при дальнейшем отборе корней. Но, естественно, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — тоже возможный вариант.

Группировка и разложение на множители**Пример 5**

$$\operatorname{ctg}^2 x + (1 + \sqrt{3}) \operatorname{ctg} x + \sqrt{3} = 0,$$

$$\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x + \sqrt{3} \operatorname{ctg} x + \sqrt{3} = 0,$$

$$\operatorname{ctg} x(\operatorname{ctg} x + 1) + \sqrt{3}(\operatorname{ctg} x + 1) = 0,$$

$$(\operatorname{ctg} x + 1)(\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}) = 0,$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x = -1 \\ \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение квадратное, и можно управиться с помощью дискриминанта или теоремы Виета — пробовали? Но с помощью группировки множителей удастся решить задачу быстрее. Впрочем, оставлю это здесь: $D = (1 + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4\sqrt{3} = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = (1 - \sqrt{3})^2$.

Пример 6

$$2 \operatorname{tg} x \cdot \sin x - \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 8 \sin x - 4\sqrt{2} = 0,$$

$$\operatorname{tg} x(2 \sin x - \sqrt{2}) + 4(2 \sin x - \sqrt{2}) = 0,$$

$$(\operatorname{tg} x + 4)(2 \sin x - \sqrt{2}) = 0,$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -4 \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi n \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$$

К успеху здесь приводят различные варианты группировки, главное — пробовать. Кстати, подумайте, нет ли в этом уравнении ограничений на переменную x ?

Пример 7

$$2 \cos x + \sin^2 x = 2 \cos^3 x,$$

$$2 \cos x(1 - \cos^2 x) + \sin^2 x = 0,$$

$$2 \cos x \sin^2 x + \sin^2 x = 0,$$

$$\begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$$

Между делом для решения уравнения $\sin x = 0$ можно отметить две точки тригонометрической окружности, у которых ординаты равны нулю (0 и π), а далее записать соответствующую серию решений. Как вы уже поняли, это можно сделать, используя « πn » ($n \in \mathbb{Z}$).

Пример 8

$$\cos 2x - 2 \cos x + 2 \sin x = 0.$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - 2 \cos x + 2 \sin x = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - 2(\cos x - \sin x) = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 2) = 0,$$

$$\begin{cases} \sin x = \cos x \\ \cos x + \sin x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Вы поняли, почему сумма $\sin x + \cos x$ не может равняться двум? Поскольку $|\sin x| \leq 1$ и $|\cos x| \leq 1$, то двоичку можно получить только в случае $\sin x = \cos x = 1$. Но это противоречит тому, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. В этой задаче нам попалось уравнение вида $\sin x = \cos x$ — предлагаю просто нарисовать тригонометрическую окружность и спросить себя, у каких точек абсцисса равна ординате? О другом подходе мы поговорим в следующей главе.

Сведение к однородным уравнениям

Пример 9

$$2 \sin x - 3 \cos x = 0,$$

$$2 \operatorname{tg} x - 3 = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2},$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени ($a \neq 0 \neq b$). Выручает деление обеих частей уравнения на $\cos x \neq 0$. Как результат — простейшее уравнение на тангенс. Подумайте, что было бы в случае деления на $\sin x \neq 0$? То, что наш делитель отличен от нуля в первом шаге алгоритма, доказывается от противного — рассмотрим ниже. Вы также можете освежить в памяти метод вспомогательного аргумента, который служит достойной альтернативой.

Пример 10

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0,$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3 \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0,$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ — так выглядит однородное тригонометрическое уравнение второй степени ($a \neq 0 \neq c$). Алгоритм решения снова весьма прост: делим обе части на $\cos^2 x \neq 0$. А почему же все-таки этот косинус не ноль? Если бы вдруг он был нулем, то уравнение приняло бы вид $\sin^2 x = 0$. Но синус и косинус одного аргумента не могут одновременно равняться нулю, ведь $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ — противоречие. Косинус, равный нулю, не является решением исходного уравнения, на него смело можно делить.

Пример 11

$$3 \sin^2 x - 0,5 \sin 2x = 2,$$

$$3 \sin^2 x - 0,5 \cdot 2 \sin x \cos x = 2 \cdot 1,$$

$$3 \sin^2 x - \sin x \cos x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$3 \sin^2 x - \sin x \cos x = 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x,$$

$$2 \cos^2 x + \sin x \cos x - \sin^2 x = 0,$$

$$2 \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x - 1 = 0,$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x = \frac{1}{2} \\ \operatorname{ctg} x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Используя известные тождества, сводим задачу к предыдущей. Разнообразия ради в этот раз поделили на квадрат синуса. Как видите, результат тот же: $\operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2}$.

Работа с тригонометрическими неравенствами и ОДЗ

Пример 12

$$\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x = 0,$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \sin 2x = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ x = \frac{\pi n}{2} \\ x \neq \pm \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, а другой существует. Не забудьте про «существует» и про то, что тангенс и котангенс существуют не всегда. Обратите внимание на использование разных целочисленных переменных: в системах это очень важно — подумайте почему.

Пример 13

$$\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ x \neq \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$$

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. В нынешнем номере легко заметить, что ОДЗ «выбивает» серию $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 14

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 x + \sin 2x}{\sqrt{\sin x}} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x (\cos x + 2 \sin x) = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \\ \sin x > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Добрый совет: иллюстрируйте свое решение с помощью тригонометрической окружности, чтобы не ошибиться — отмечаем закрашенными точками корни уравнения из числителя, а затем выбираем те из них, что располагаются в первой или второй четвертях, то есть удовлетворяют неравенству $\sin x > 0$.

Решаем, тренируемся, получаем хороший балл

Пример 15

$$15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x},$$

$$5^{\cos x} \cdot 3^{\cos x} - 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x} = 0,$$

$$3^{\cos x} (5^{\cos x} - 5^{\sin x}) = 0,$$

$$\begin{cases} 3^{\cos x} = 0 \\ 5^{\cos x} = 5^{\sin x} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Трижды пять — пятнадцать, а с однородными уравнениями вы уже в хороших отношениях. В ходе решения использовано то, что показательная функция принимает только положительные значения. При желании еще на первых шагах можно было делить обе части уравнения на $3^{\cos x}$. Для разнообразия: $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Пример 16

$$\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3,$$

$$\cos x + \sin 2x + 8 = 2^3,$$

$$\cos x + 2 \sin x \cos x + 8 = 8,$$

$$\cos x(1 + 2 \sin x) = 0,$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$$

Достаточно вспомнить определение логарифма. Заметьте, что для найденных значений икс аргумент исходного логарифма положителен, ведь во второй строке написано, что он равен 8.

Пример 17

$$7 \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos x} + 1 = 0,$$

$$\frac{7 \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0,$$

$$\frac{7(1 - \cos^2 x) - \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0,$$

$$\begin{cases} -6 \cos^2 x - \cos x + 7 = 0 \\ \cos^2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Задачу можно решить еще проще, если сразу применить тождество $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

Пример 18

$$\frac{(\operatorname{ctg} x + \frac{4}{3}) \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\sin x - \frac{3}{5}} = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = -\frac{4}{3} \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x \neq \frac{3}{5} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pi - \operatorname{arccctg} \frac{4}{3} + \pi n \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x \neq \operatorname{arcsin} \frac{3}{5} + 2\pi k \\ x \neq \pi - \operatorname{arcsin} \frac{3}{5} + 2\pi l \end{array} \right., \quad n, k, l \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\operatorname{arccctg} \frac{4}{3} + 2\pi n \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{array} \right., \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Изобразите решения соответствующих уравнений и неравенств на тригонометрической окружности, тогда легче будет понять, кто лишний. В этом примере может возникнуть сомнение, совпадают ли $\operatorname{arccctg}(-\frac{4}{3}) = \pi - \operatorname{arccctg} \frac{4}{3}$ и $\pi - \operatorname{arcsin} \frac{3}{5}$, но вспомните египетский треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Попробуйте выразить синус и котангенс острого угла при катете длины 4 по определению, и все станет ясно.

Пример 19

$$|\cos x| = 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x \geq 0 \\ \cos x = 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x \\ \cos x < 0 \\ -\cos x = 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos x \geq 0 \\ \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos x < 0 \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \end{array} \right., \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тригонометрические неравенства можно и нужно решать с помощью единичной окружности: косинус положителен в первой и четвертой четвертях, а во второй и третьей — отрицателен. Напомню для интересующихся, что аналитический ответ, например, к неравенству $\cos x > 0$ выглядит так: $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 20

$$\log_9 (3^{2x} + 5\sqrt{2} \sin x - 6 \cos^2 x - 2) = x,$$

$$3^{2x} + 5\sqrt{2} \sin x - 6 \cos^2 x - 2 = 9^x,$$

$$6 \sin^2 x + 5\sqrt{2} \sin x - 8 = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{4\sqrt{2}}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{array} \right., \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Не бойтесь «страшненького» дискриминанта — корни очень даже красивые. Заметьте, что поиск ОДЗ не самое приятное дело: $3^{2x} + 5\sqrt{2} \sin x - 6 \cos^2 x - 2 > 0$. Но, как и в 16-ом примере, это условие выполнено в ходе решения: второй строкой мы приравняем аргумент к положительному выражению 9^x .

Пример 21

$$\frac{\sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 4 \cos^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 4 \cos^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2} = 0 \\ \sin^2 \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \sin^2 x = 0 \\ \frac{x}{2} \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x(1 - \sin x) = 0 \\ x \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \\ x = \pi + 2\pi m \end{cases}, m \in \mathbb{Z}.$$

Работая со знаменателем дроби, важно найти ограничения на «чистую» переменную x , а не останавливаться на полпути.

Пример 22

$$\begin{cases} 2 \sin x - 5 \cos y = 7 \\ 5 \sin x + \cos y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = 4 - 5 \sin x, \\ 2 \sin x - 5 \cdot (4 - 5 \sin x) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = 4 - 5 \sin x, \\ 27 \sin x = 27 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos y = 4 - 5 \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ y = \pi + 2\pi k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}.$$

Использован метод подстановки, хотя нетрудно управиться и сложением. В этой задаче особенно важно показать независимость x и y , используя разные целочисленные переменные — например, n и k .

Отбор корней из данного промежутка

В каждом примере ниже будет общее условие: для указанной серии решений отобрать все корни, принадлежащие данному промежутку. Сделать это нетрудно, но ваша главная цель в другом — освоите как можно больше подходов к решению подобного рода задач.

Пример 1

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in [-\pi; \pi]$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{6} + \pi n \leq \pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$-1 \leq \frac{1}{6} + n \leq 1, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$-1 - \frac{1}{6} \leq n \leq 1 - \frac{1}{6}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\left(-\frac{7}{6} \leq n \leq \frac{5}{6}, \quad n \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow (n = -1 \text{ или } n = 0)$$

Значит,

Ответ: $-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$.

Принадлежность корней данному отрезку запишем с помощью двойного неравенства, а затем решим его. Работаем одновременно с каждой частью этого двойного неравенства: смело можно делить на положительное число π , также можно переносить слагаемые из одной части в другую, меняя знак на противоположный. Наша цель — оценить переменную «эн», найти все ее целые значения. А получив «эн», находим соответствующие корни.

Пример 2

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in [0; 2\pi]$$

$$0 \leq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$0 \leq -\frac{1}{2} + 2n \leq 2, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{1}{2} \leq 2n \leq \frac{5}{2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq n \leq \frac{5}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow n = 1,$$

откуда $x = \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$0 \leq \frac{1}{2} + 2n \leq 2, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{1}{2} \leq 2n \leq \frac{3}{2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\left(-\frac{1}{4} \leq n \leq \frac{3}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow n = 0,$$

стало быть, $x = \frac{\pi}{2}$.

Отбирая корни с помощью двойных неравенств, вам предстоит работать с каждой серией в отдельности. Как обычно, не забудьте, найдя подходящие значения целочисленной переменной, определить требуемые корни: в ответе пишем именно их. Заметьте, что задачу можно решить проще, если записать исходное множество в виде $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

$$x = \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$$

$x(n) = \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ — возрастающая функция.

$$x(0) = \frac{2\pi}{3} < \frac{3\pi}{2},$$

$$x(1) = \frac{5\pi}{3} \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right],$$

$$x(2) = \frac{8\pi}{3} \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right],$$

$$x(3) = \frac{11\pi}{3} > \frac{7\pi}{2}.$$

С учетом монотонности при всех других целых значениях n корни не принадлежат указанному отрезку. Тем самым мы рассмотрели все возможные значения n и соответствующие им значения x .

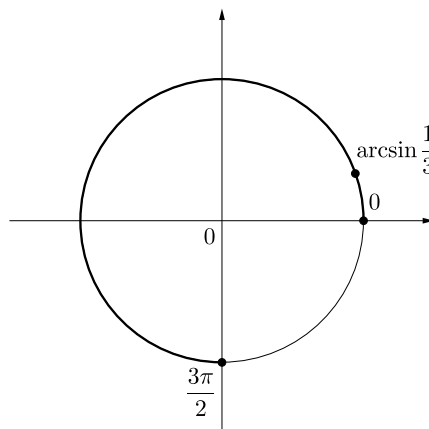
Ответ: $\frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$.

Монотонное возрастание означает следующее: большему значению аргумента n соответствует большее значение функции $x(n)$. И если при $n = 3$ мы получили x , который уже больше правой границы отрезка, то нет смысла рассматривать $n \geq 3$. Аналогичная ситуация при $n \leq 0$: найденные корни будут заведомо меньше левой границы отрезка.

Пример 4

$$x = \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x \in \left[0; \frac{3\pi}{2} \right)$$

Отберем корни с помощью тригонометрической окружности.



$$x = \arcsin \frac{1}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow x = \arcsin \frac{1}{3} \in \left[0; \frac{3\pi}{2} \right).$$

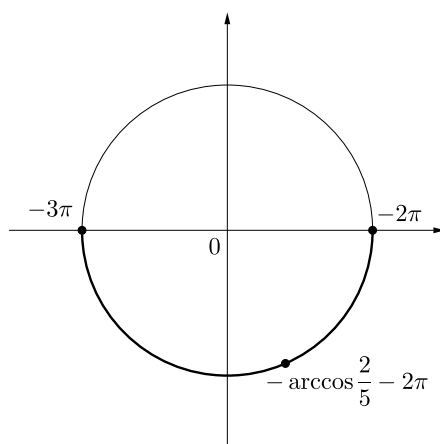
Ответ: $\arcsin \frac{1}{3}$.

Иногда решениями служат нетабличные «арк-числа». Как производить отбор в этом случае? Удобнее всего работать с тригонометрической окружностью: отметьте границы данного промежутка и подходящие корни. Освежите в памяти определения аркфункций в справочных материалах. При оформлении на экзамене обязательно отметьте границы данного отрезка, выделите соответствующую дугу, а также обозначьте все подходящие корни. Решения, которые не принадлежат указанному отрезку, на окружности не стоит отмечать, ровно как и вспомогательные значения.

Пример 5

$$x = \pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x \in [-3\pi; -2\pi]$$

Отберем корни с помощью тригонометрической окружности.



$$x = -\arccos \frac{2}{5} \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \Rightarrow x = \left(-\arccos \frac{2}{5} - 2\pi\right) \in [-3\pi; -2\pi].$$

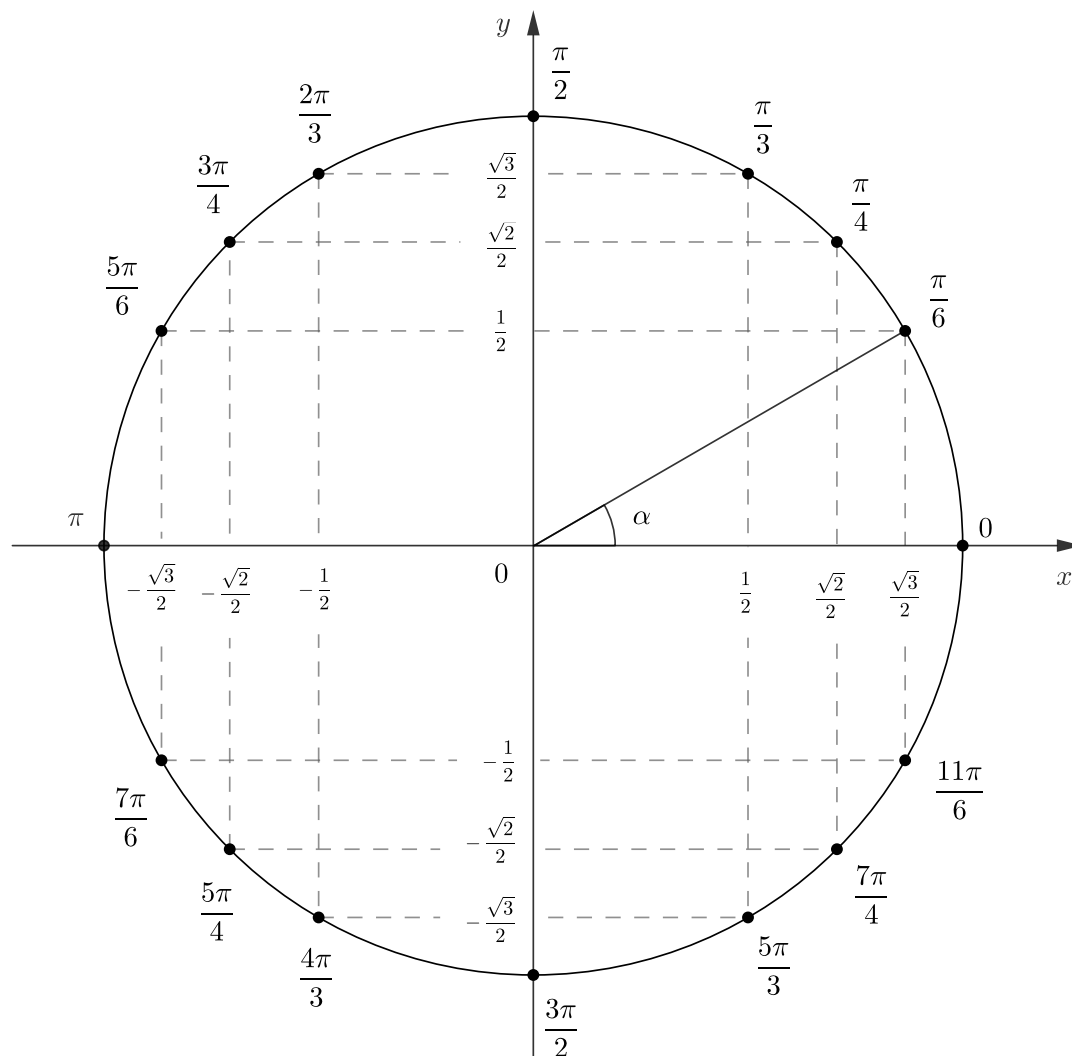
Ответ: $-\arccos \frac{2}{5} - 2\pi$.

В заключительном примере нетрудно заметить, что одна из серий решений заведомо не даст подходящих корней. А серия с минусом дает нужное значение при $n = -1$. Напомню, что область значений функции $y = \arccos x$ — отрезок $[0; \pi]$.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Тригонометрическая окружность



Основные тригонометрические тождества

1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$

3) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z})$

4) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z})$

5) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z})$

6) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$

Формулы суммы и разности аргументов

7) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$

8) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$

9) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

10) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

11) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (\alpha, \beta, (\alpha + \beta) \notin \{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\})$

12) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (\alpha, \beta, (\alpha - \beta) \notin \{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\})$

Формулы двойных аргументов

13) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

14) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

15) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (\alpha \notin \{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\})$

Определения обратных тригонометрических функций

16) Если $|a| \leq 1$, то $\arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a, \\ -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \end{cases}$

17) Если $|a| \leq 1$, то $\arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = a, \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$

18) $\operatorname{arctg} a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} t = a, \\ -\pi/2 < t < \pi/2 \end{cases}$

19) $\operatorname{arcctg} a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} t = a, \\ 0 < t < \pi \end{cases}$

Формулы преобразования отрицательных аргументов

20) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

21) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

22) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$

23) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha \quad (\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z})$

24) $\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad (-1 \leq x \leq 1)$

25) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad (-1 \leq x \leq 1)$

26) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$

27) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

Формулы решений простейших тригонометрических уравнений

$$28) \sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z} \quad (-1 \leq a \leq 1)$$

$$29) \cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad (-1 \leq a \leq 1)$$

$$30) \operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$31) \operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

АЛГЕБРА И АРИФМЕТИКА**Свойства степени**

$$1) a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$2) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$3) a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

$$4) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$5) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$6) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0)$$

$$7) a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

$$8) \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m \quad (a \neq 0)$$

$$9) a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \neq 1)$$

$$10) a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \neq 1)$$

Свойства квадратного (арифметического) корня и определение модуля числа

$$11) \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

$$12) \sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|} \quad (ab \geq 0)$$

$$13) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$$

$$14) \sqrt{a^2} = |a|$$

$$15) |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Формулы сокращённого умножения

$$16) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$17) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

18) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

19) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

20) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

21) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

22) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Определение и свойства логарифма

23) $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \quad (b > 0, a > 0, a \neq 1)$

24) $b^{\log_b a} = a \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$

25) $\log_a 1 = 0 \quad (a > 0, a \neq 1)$

26) $\log_a a = 1 \quad (a > 0, a \neq 1)$

27) $\log_a a^m = m \quad (a > 0, a \neq 1)$

Действия с логарифмами

28) $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc) \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0)$

29) $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c} \right) \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0)$

30) $k \cdot \log_a b = \log_a b^k \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$

31) $k \cdot \log_a b = \log_{a^{1/k}} b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, k \neq 0)$

32) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1)$

33) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1)$

Арифметическая прогрессия

34) $a_n = a_1 + (n - 1)d$

35) $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

36) $a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$

Геометрическая прогрессия

37) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \quad (b_1 \neq 0, q \neq 0)$

38) $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad (b_1 \neq 0, q \neq 0, q \neq 1)$

39) $b_n^2 = b_{n+1} \cdot b_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

НАЧАЛА АНАЛИЗА**Таблица производных**

1) $(C)' = 0$

2) $(kx)' = k$

3) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

4) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5) $(a^x)' = a^x \ln a$

6) $(e^x)' = e^x$

7) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

8) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

9) $(\sin x)' = \cos x$

10) $(\cos x)' = -\sin x$

11) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Правила вычисления производных

13) $(u + v)' = u' + v'$

14) $(u - v)' = u' - v'$

15) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

16) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

17) $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$

НЕРАВЕНСТВА**Метод рационализации**

1) Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то $a^{f(x)} - a^{g(x)} \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)(f(x) - g(x)) \vee 0$

2) $\log_a f(x) - \log_a g(x) \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(f(x) - g(x)) \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0, \\ a \neq 1 \end{cases}$

3) $|f(x)| - |g(x)| \vee 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \vee 0$

Равносильные переходы в неравенствах с модулями и радикалами

$$4) |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{cases} \quad 5) |f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases}$$

$$6) |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x) \end{cases} \quad 7) |f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$$

$$8) \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \quad 9) \sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \leq 0, \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases}$$

$$10) \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x) \end{cases} \quad 11) \sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

СТЕРЕОМЕТРИЯ**Метод координат**

1) Формула расстояния между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ в прямоугольной декартовой системе координат:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2) Формула косинуса угла между прямыми. Если $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ — направляющие векторы прямых a и b , то

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

3) Формула синуса угла между прямой a с направляющим вектором $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и плоскостью β с вектором нормали $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$:

$$\sin(\widehat{a, \beta}) = |\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

4) Формула косинуса угла между плоскостями. Если $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ — векторы нормали к плоскостям α и β , то

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

5) Формула расстояния от точки $S(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\rho(S, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ГДЕ НАЙТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ?

Все номера заданий основного блока не случайно выделены синим цветом: клик переведет вас к видеоразбору, в котором полное решение завершается верным ответом. Дополнения, ответы на популярные вопросы, указания на опечатки часто можно найти в описании к видео. Смело задавайте свои вопросы в комментариях и, конечно, подпишитесь на канал с колокольчиком, чтобы не пропустить новые выпуски.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ткачук В. В. Математика — абитуриенту. — 20-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2020 — 944 с.
- [2] Гордин Р. К. ЕГЭ 2021. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 14 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Яценко. — М.: МЦНМО, 2021 — 144 с.
- [3] Гордин Р. К. ЕГЭ 2021. Математика. Планиметрия. Стереометрия. Задача 16 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Яценко. — М.: МЦНМО, 2021 — 272 с.
- [4] Шестаков С. А. ЕГЭ 2022. Математика. Задачи с параметром. Задача 17 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Яценко. — М.: МЦНМО, 2022 — 288 с.
- [5] Шестаков С. А. ЕГЭ 2022. Математика. Задачи с экономическим содержанием. Задача 15 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Яценко. — М.: МЦНМО, 2022. — 144 с.
- [6] Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года: учебно-методическое пособие / под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2016. — 384 с.
- [7] Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике (2005-2017) / А. В. Бегунц [и др.] — М.: МЦНМО, 2017 — 208 с.
- [8] Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / под ред. А. Г. Мордковича. — 6-е изд., стереотип. — М.: Мнемозина, 2009 — 428 с.
- [9] Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / под ред. А. Г. Мордковича. — 6-е изд., стереотип. — М.: Мнемозина, 2009 — 348 с.
- [10] Олимпиада «Покори Воробьевы горы!» по математике (2013-2018) / А. С. Зеленский [и др.] — М.: МЦНМО, 2019 — 192 с.
- [11] Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2009: заключительные этапы / Н. Х. Агаханов [и др.] — М.: МЦНМО, 2017 — 552 с.
- [12] Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 3 т. — Т.1: Планиметрия. Преобразования плоскости. — 4-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2018 — 312 с.
- [13] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. — 5-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2006. — 640 с.
- [14] Смирнова И. М. Четырёхмерная геометрия. Элективный курс для учащихся 10-11 классов общеобразовательных учреждений. / Смирнова И. М., Смирнов В. А. — 2-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2016. — 184 с.
- [15] Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. — 8-е изд., испр.. — М.: МЦНМО, 2017 — 564 с.
- [16] Гальперин Г. А. Многомерный куб. — М.: МЦНМО, 2015 — 80 с.
- [17] Центральная приемная комиссия МГУ им. М.В. Ломоносова [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://cpk.msu.ru>
- [18] Подготовка к олимпиадам и ЕГЭ по математике и физике: Игорь Вячеславович Яковлев [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://mathus.ru>
- [19] Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный институт педагогических измерений» [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.fipi.ru>

- [20] Образовательный портал для подготовки к экзаменам «РЕШУ ЕГЭ» [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://ege.sdangia.ru>
- [21] Ларин Александр Александрович. Математика. Репетитор [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://alexlarin.net>
- [22] Открытый банк математических задач ЕГЭ [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://mathege.ru>
- [23] Приёмная комиссия мехмата МГУ [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://pk.math.msu.ru>
- [24] Задачи [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://problems.ru>
- [25] ИПС «Задачи по геометрии» [Электронный ресурс]. — Режим доступа: zadachi.mccme.ru
- [26] Журнал «Квант» [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://kvant.mccme.ru>
- [27] GitHub - 3b1b/manim: Animation engine for explanatory math videos [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://github.com/3b1b/manim>