**Задание 17. Финансовая математика — профильный ЕГЭ по математике**

Задание 17 Профильного ЕГЭ по математике — «экономическая» задача. Речь, как вы уже поняли, речь пойдет о деньгах. О кредитах и вкладах. О ситуациях, где нужно узнать, при каких значениях переменной будет максимальна прибыль или минимальны издержки. Кстати, само задание 17 оценивается на ЕГЭ в 3 первичных балла.

**В этой статье:**

*Как научиться решать «экономические» задачи. С чего начать,*

*Две схемы решения задач на кредиты и как их распознать,*

*Комбинированные задачи,*

*В чем основная сложность «экономической задачи»,*

*Задания на оптимальный выбор. В том числе — с применением производной.*

**Вы уже сейчас сможете ответить на такие вопросы:**

1. *Что принимается за 100%?*
2. *Величина х увеличилась на p%. Как это записать?*
3. *Величина y дважды уменьшилась на р%. Как это записать?*

В задачах первого типа обычно применяется [**формула для суммы геометрической прогрессии**](https://ege-study.ru/geometricheskaya-progressiya-v-zadachax-ege-po-matematike/). В задачах второго типа — [**формула суммы арифметической прогрессии**](https://ege-study.ru/arifmeticheskaya-progressiya-v-zadachax-ege-po-matematike/)**.**

Посмотрите, чем эти схемы отличаются друг от друга. На какие ключевые слова в условии надо обратить внимание.

Потому что первое, что надо сделать, когда решаете «экономическую» задачу на кредиты или вклады, — определить, к какому типу она относится.

Давайте потренируемся.

*1. 31 декабря 2014 года Аристарх взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Аристарх переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Аристарх выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?*

Конечно, это задача первого типа. Есть информация о платежах. В условии сказано, что Аристарх выплатит долг четырьмя равными платежами.

Введем обозначения:

S=6902тыс. рублей - сумма долга. Расчеты будем вести в тысячах рублей.

p= 12,5 \%- процент банка,

k=1+\frac{{ p}}{100}=1+\frac{125}{1000}=1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8} - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличилась сумма долга после начисления процентов,

X— сумма ежегодного платежа.

Составим схему погашения кредита. Заметим, что здесь 4 раза (то есть в течение 4 лет) повторяются одни и те же действия:

- сумма долга увеличивается в kраз,

- Аристарх вносит на счет сумму Xв счет погашения кредита, и сумма долга уменьшается на X. Вот что получается:

Раскроем скобки:

S{{ k}}^4-{ X}\left({{ k}}^3+{{ k}}^2+{ k}+1\right)=0.

Что у нас в скобках? Да, это геометрическая прогрессия, и ее проще записать как

1+{{ k}+{{ k}}^2+{ k}}^3. В этой прогрессии первый член равен 1, а каждый следующий в k раз больше предыдущего, то есть знаменатель прогрессии равен k.

Применим формулу суммы геометрической прогрессии:

{{ Sk}}^4={ X}\cdot \frac{{{ k}}^4-1}{{ k}-1}=0.И выразим из этой формулы X.

{ X}=\frac{{ S}\cdot {{ k}}^4\left({ k}-1\right)}{{{ k}}^4-1}.Что же, можно подставить численные данные. Стараемся, чтобы наши вычисления были максимально простыми. Поменьше столбиков! Например, коэффициент k лучше записать не в виде десятичной дроби 1,125 — а в виде обыкновенной дроби \frac{9}{8}, Иначе у вас будет 12 знаков после запятой!

И конечно, не спешить возводить эту дробь в четвертую степень или умножать на S = 6902000 рублей.

тыс. руб.

Ответ: 2296350 рублей

Вот следующая задача.

*2. Жанна взяла в банке в кредит 1,8 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 1 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна вернёт банку в течение первого года кредитования?*

В этой задаче сумма долга уменьшается равномерно — задача второго типа.

Пусть S — первоначальная сумма долга, S = 1800 тысяч рублей.

Нарисуем схему начисления процентов и выплат. И заметим некоторые закономерности.

Как обычно, { k}=1+\frac{{ p}}{100}.

Сумма долга уменьшается равномерно. Можно сказать — равными ступеньками. И каждая ступенька равна \frac{1}{24}{ S}.После первой выплаты сумма долга равна \frac{23}{24}{ S},после второй \frac{22}{24}{ S}.

Тогда первая выплата {{ X}}_1={ kS}-\frac{23}{24}{ S},Вторая выплата{{ X}}_2={ k}\cdot \frac{23}{24}{ S}-\frac{22}{24}{ S},

\dots 

Последняя в году выплата {{ X}}_{12}={ k}\cdot \frac{13}{24}{ S}-\frac{12}{24}{ S}.

Сумма всех выплат в течение первого года:

В первой «скобке» — сумма 12 членов арифметической прогрессии, в которой {{ a}}_1=\frac{13}{24};{{ a}}_{{ n}}=\frac{24}{24}=1.  Обозначим эту сумму {{ S}}_1.

{{ S}}_1=\frac{{{ a}}_1+{{ a}}_{12}}{2}\cdot 12=\frac{13+24}{2\cdot 24}\cdot 12=\frac{37}{4}. 

Во второй скобке — также сумма 12 членов арифметической прогрессии, в которой {{ b}}_1=\frac{12}{24};{{ b}}_{{ n}}=\frac{23}{24}.Эту сумму обозначим {{ S}}_{2.}

{{ S}}_2=\frac{{{ b}}_1+{{ b}}_{12}}{2}\cdot 12=\frac{12+23}{2\cdot 24}\cdot 12=\frac{35}{4}. 

Общая сумма выплат за год:

\small X= S \left({ kS}_1-{{ S}}_2\right)=\frac{1800}{4}\left({ 1,01}\cdot 37-35\right)=  
=\frac{1800\cdot { 2,37}}{4}={ 2,37}\cdot 450= 1066,5тыс. рублей

Ответ: 1066500 рублей.

Еще одна задача — комбинированная. Здесь мы рисуем такую же схему выплаты кредита, как в задачах второго типа.

*3. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:*

*− каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;*

*− с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;*

*− в июле 2017,2018 и 2019 долг остаётся равным S тыс. рублей;*

*− выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 625 тыс. рублей;*

*− к июлю 2021 долг будет выплачен полностью.*

*Найдите общую сумму выплат за пять лет.*

Введем переменные: { k}=1+\frac{25}{100}=\frac{5}{4},Y=625 тысяч рублей. Рисуем схему погашения кредита:

Общая сумма выплат: { X}=3\cdot \left({ kS}-{ S}\right)+2{ Y}=3{ S}\left({ k}-1\right)+2{ Y.}Кроме того, долг был полностью погашен последней выплатой Y.

Это значит, что { k}\left({ kS}-{ Y}\right)={ Y},и тогда

тысяч рублей.

Но не только задачи на кредиты и вклады могут встретиться в задании 17 Профильного ЕГЭ по математике. Есть еще задачи на оптимальный выбор. Например, нужно найти максимальную прибыль (при соблюдении каких-либо дополнительных условий), или минимальные затраты. Сначала в такой задаче нужно понять, как одна из величин зависит от другой (или других). Другими словами, нужна та функция, наибольшее или наименьшее значение которой мы ищем. А затем — найти это наибольшее или наименьшее значение. Иногда — с помощью производной. А если повезет, и функция получится линейная или квадратичная — можно просто воспользоваться свойствами этих функций.

*4. Консервный завод выпускает фруктовые компоты в двух видах тары—стеклянной и жестяной. Производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции в каждом из видов тары должно быть выпущено не менее 20 центнеров. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена завода за 1 центнер продукции для обоих видов тары.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Вид тары** | **Себестоимость, 1 центнера** | **Отпускная цена, 1 центнера** |
| *стеклянная* | *1500 руб* | *2100 руб* |
| *жестяная* | *1100 руб* | *1750 руб* |

*Предполагая, что вся продукция завода находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль завода за один день (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).*

По условию, завод не может выпускать компот только в стеклянных банках или только в жестяных — должны быть и те, и другие.

Пусть x — доля мощностей завода, занятых под производство компотов в стеклянных банках, а y — доля мощностей, занятых под производство компотов в жестяных банках, Тогда x+y=1. (Например, х=0,3 и у = 0,7 — то есть 30% производства — это компот в стеклянных банках, а 70% - компот в жестяных банках.

Если бы завод выпускал только компот в стеклянных банках, их бы получилось 90 центнеров в сутки. Однако выпускаются и те, и другие, и компотов в стеклянных банках производится 90x центнеров, а в жестяных банках - 80y центнеров в сутки.

Составим таблицу.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вид тары** | **Доля в общем количестве** | *Производится в сутки* | **Прибыль за 1 центнер** |
| *стеклянная* | *x* | *90x* | *2100 - 1500 = 600 руб* |
| *жестяная* | *y* | *80y* | *1750 - 1100 = 650 руб* |

Общая прибыль завода за сутки равна 600\cdot 90x+650\cdot 80y=54000x+52000y=2000\left(27x+26y\right).

По условию, 90x\ge 20и 80y\ge 20, то есть x\ge \frac{2}{9}и y\ge \frac{1}{4}.

Нужно найти наибольшее значение выражения 2000\cdot \left(27x+26y\right)при выполнении следующих условий:

Подставим y=1-xв выражение для прибыли завода за сутки. Получим, что она равна 2000 \cdot (27x+26(1-x))=2000(26+x).Это линейная функция от x. Она монотонно возрастает и свое наибольшее значение принимает при x=\frac{3}{4}.Тогда y=\frac{1}{4}и максимально возможная прибыль завода за день равна

2000\cdot \left(27\cdot \frac{3}{4}+26\cdot \frac{1}{4}\right)=2000\cdot \frac{107}{4}=53500руб.

Ответ: 53500 руб.