Тригонометрические тождества:

① Основные тригонометрические тождества:

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ $\quad$ $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1$ $\quad$ $1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\quad$ $1+\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$

② Формулы приведения:

1) Формулы тупых углов: $f(\pi n-x)=\pm f(x)$; $\quad f(\pi n+\pi/2-x)=\pm g(x)$,

где f и g – взаимообратные функции ($\sin$ - $\cos$, $\cos$ - $\sin$, tg - ctg, ctg - tg), $n=0;1$.

$\sin(-x)=-\sin x$ $\quad$ $\sin(\pi/2-x)=\cos x$ $\quad$ $\sin(\pi-x)=\sin x$ $\quad$ $\sin(3\pi/2-x)=-\cos x$

$\cos(-x)=\cos x$ $\quad$ $\cos(\pi/2-x)=\sin x$ $\quad$ $\cos(\pi-x)=-\cos x$ $\quad$ $\cos(3\pi/2-x)=-\sin x$

Формулы тупых углов выводятся через равные треугольники на числовой окружности полярно-декартовой системы координат.

2) Формулы периодических углов: $f(x\pm\pi)=-f(x)$; $\quad f(x\pm\pi/2\pm\pi n)=\pm g(x)$,

где f и g – взаимообратные функции ($\sin$ - $\cos$, $\cos$ - $\sin$, tg - ctg, ctg - tg), $n=0;1$.

$\sin(x\pm\pi/2)=\pm\cos x$ $\quad$ $\sin(x\pm\pi)=-\sin x$ $\quad$ $\sin(x\pm 3\pi/2)=\mp\cos x$

$\cos(x\pm\pi/2)=\mp\sin x$ $\quad$ $\cos(x\pm\pi)=-\cos x$ $\quad$ $\cos(x\pm 3\pi/2)=\pm\sin x$

Формулы периодических углов выводятся из формул тупых углов.

③ Формулы суммы и разности углов:

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$ $\qquad$ $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$

$\operatorname{tg}(x\pm y)=\dfrac{\operatorname{tg} x\pm\operatorname{tg} y}{1\mp\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}(x\pm y)=\dfrac{\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y\mp 1}{\operatorname{ctg} y\pm\operatorname{ctg} x}$

④ Формулы двойного угла:

$\sin 2x=2\sin x\cos x$ $\quad$ $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ $\quad$ $\operatorname{tg} 2x=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ $\quad$ $\operatorname{ctg} 2x=\dfrac{\operatorname{ctg}^2 x-1}{2\operatorname{ctg} x}$

⑤ Формулы половинного угла (формулы понижения степени):

$\sin\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$ $\left(\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)$ $\qquad$ $\cos\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$ $\left(\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

⑥ Формулы произведения тригонометрических функций:

$\sin x\sin y=\dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$ $\qquad$ $\sin x\cos y=\dfrac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$

$\cos x\cos y=\dfrac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$

⑦ **Формулы суммы и разности тригонометрических функций:**

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y} \qquad \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$$

⑧ **Универсальная тригонометрическая подстановка (УТП):** $\left(x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in Z\right)$

$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \qquad \operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \qquad \operatorname{ctg} 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}$$

⑨ **Обратные тригонометрические функции (аркфункции):**

$$\arcsin x + \arccos x = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$$

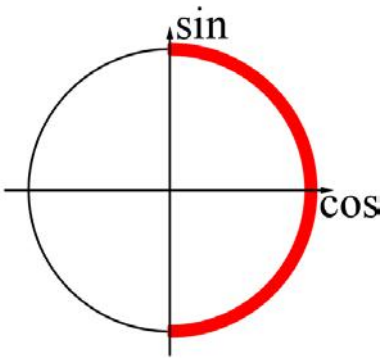
$$\arcsin(-a) = -\arcsin a \qquad \arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

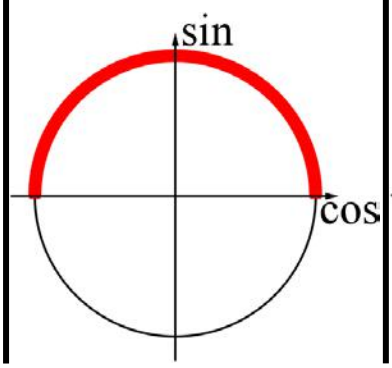
$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a \qquad \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

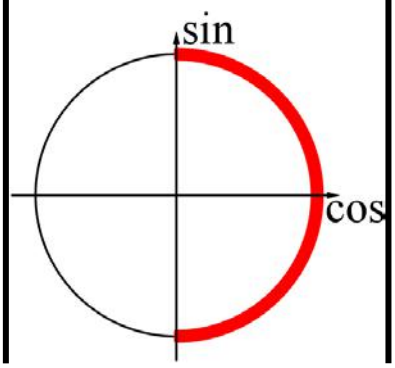
<u>Решение тригонометрических уравнений:</u>

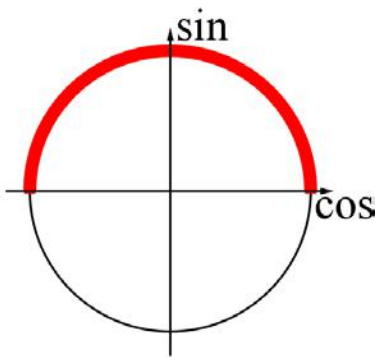
① **Простые тригонометрические уравнения:** $\left(n, k \in Z\right)$

$\sin x = a,\quad a \in [-1;\ 1]$	$\cos x = a,\quad a \in [-1;\ 1]$	$\operatorname{tg} x = a,\quad x \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$\operatorname{ctg} x = a,\quad x \neq \pi k$
$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$
Область арксинусов:	Область арккосинусов:	Область арктангенсов:	Область арккотангенсов:









② $a\sin x + b\cos x = c$: $\quad x = 2\operatorname{arctg}\dfrac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c} + 2\pi n,\quad n \in Z.$ (УТП)

ОДЗ: 1) Если $c = -b$, то $x = -2\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + 2\pi n,\quad n \in Z.$

2) УТП: $\cos\ x/2 \neq 0 \qquad x \neq \pi + 2\pi k,\quad k \in Z.$