Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Тренировочный вариант
контрольных измерительных материалов
единого государственного экзамена 2022 года
по математике

Профильный уровень

подготовлен сообществом ШКОЛЬНАЯ ПОМОЩЬ
https://vk.com/pro_matem

Разрешается копирование в некоммерческих образовательных целях

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №1 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Пояснения к тренировочному варианту контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2022 года по МАТЕМАТИКЕ

Назначение тренировочного варианта заключается в том, чтобы дать возможность участнику ЕГЭ составить представление о структуре будущих КИМ, количестве заданий, об их форме и уровне сложности. А так же потренироваться в решении заданий.

Это позволит выпускникам выработать стратегию подготовки к ЕГЭ в 2022 г.

2022 Сообщество ШКОЛЬНАЯ ПОМОЩЬ https://vk.com/pro_matem

Тренировочный вариант
контрольных измерительных материалов
единого государственного экзамена 2022 года
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №1 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения $7^{1+2x} = 49^{2x}$.

Ответ:_____.

2 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 5 спортсменов из Чехии, 5 из Словакии, 5 из Австрии и 10 из Швейцарии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швейцарии.

Ответ:_____.

3 Площадь параллелограмма ABCD равна 84. Точка E — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

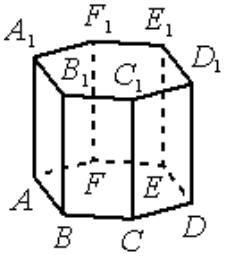
Ответ:_____.

4 Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[15]{5} \cdot 5 \cdot \sqrt[10]{5}}{\sqrt[6]{5}}$

Ответ:_____.

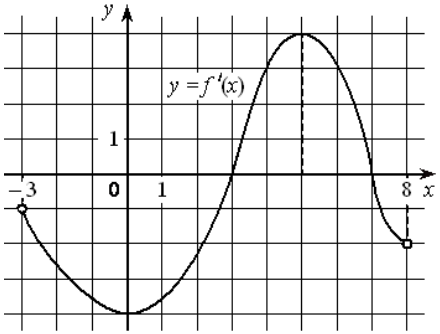
2022 Сообщество ШКОЛЬНАЯ ПОМОЩЬ https://vk.com/pro_matem

5 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, B_1 правильной шестиугольной призмы A B C D E F A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 6.



Ответ:_____.

6 На рисунке изображён график функции y = f′ (x) — производной функции f(x), определённой на интервале (− 3 ; 8). Найдите точку максимума функции f(x).



Ответ:_____.

7 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора получена экспериментально: $T = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1450$ К, $a = -30$ К/мин^2, b = 180 К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Через сколько минут после начала работы нужно отключить прибор?

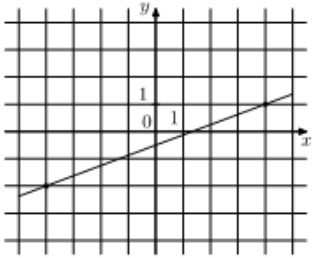
Ответ:_____.

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №1 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

8 В сосуд, содержащий 7 литров 15-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 8 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

Ответ:_____.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(12)$.



Ответ:_____.

10 Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,5. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно три мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно две мишени»?

Ответ:_____.

11 Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 6x - 5$ на отрезке [9 ; 36].

Ответ:_____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

2022 Сообщество ШКОЛЬНАЯ ПОМОЩЬ https://vk.com/pro_matem

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}+x\right)\cdot\sin x=\cos x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{9\pi}{2};6\pi]$.

13 В правильной треугольной пирамиде MABC боковые ребра равны 10, а сторона основания равна 12. Точки K и L делят стороны основания AB и AC соответственно так, что AK : KB = CL : LA = 1 : 5.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MKL являемтся равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MKL.

14 Решите неравенство

$$\frac{\log_8 x}{\log_8\left(\frac{x}{64}\right)}\geq\frac{2}{\log_8 x}+\frac{3}{\log_8^2 x-\log_8 x^2}.$$

15 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на срок 10 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наименьшую возможную ставку r, если известно, что последний платёж будет не менее 0,92 млн рублей.

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №1 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

16 Около остроугольного треугольника ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN. Высота BH пересекает эту окружность в точке K. Известно, что угол BAC равен 35°, угол ACB равен 65°.

а) Докажите, что AN = CK.

б) Найдите KN, если радиус окружности равен 12.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{(y^2-xy-9y+5x+20)\sqrt{x+5}}{\sqrt{7-y}}=0,\\ a=x+y\end{cases}$$

имеет единственное решение.

18 На доске написано несколько различных натуральных чисел, в записи которых могут быть только цифры 4 и 9 (возможно, только одна из этих цифр).

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 107?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 289?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 3986?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

2022 Сообщество ШКОЛЬНАЯ ПОМОЩЬ https://vk.com/pro_matem

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–11 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	0,5
2	0,4
3	21
4	5
5	12
6	7
7	1
8	7
9	4
10	3
11	-77

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным; все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №1 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

12 а) Решите уравнение $-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}+x\right)\cdot\sin x=\cos x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{9\pi}{2};6\pi]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$\sqrt{2}\cos x\cdot\sin x-\cos x=0$

$\cos x(\sqrt{2}\sin x-1)=0$

$\cos x=0$ или $\sqrt{2}\sin x-1=0$

$\cos x=0$ при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

$\sqrt{2}\sin x-1=0$ при $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$ и $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi m, m\in Z$

б) С помощью двойных неравенств найдём корни, принадлежащие отрезку $[\frac{9\pi}{2};6\pi]$:

1)

$\frac{9\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}+\pi k\le 6\pi\ \ /\cdot\frac{2}{\pi}$

$9\le 1+2k\le 12$

$8\le 2k\le 11$

$4\le k\le 5{,}5$

$k=4;5.$

при $k=4$ $x=\frac{\pi}{2}+4\pi=\frac{9\pi}{2}$

при $k=5$ $x=\frac{\pi}{2}+5\pi=\frac{11\pi}{2}$

2)

$\frac{9\pi}{2}\le\frac{\pi}{4}+2\pi n\le 6\pi\ \ /\cdot\frac{4}{\pi}$

$18\le 1+8n\le 24$

$17\le 8n\le 23$

$\frac{17}{8}\le n\le\frac{23}{8}$

$2\frac{1}{8} \le n \le 2\frac{7}{8}$

нет целых n

3)

$\frac{9\pi}{2} \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi m \le 6\pi \ \ / \cdot \frac{4}{\pi}$

$18 \le 3 + 8m \le 24$

$15 \le 8m \le 21$

$\frac{15}{8} \le m \le \frac{21}{8}$

$1\frac{7}{8} \le n \le 2\frac{5}{8}$

$m = 2.$

при $m = 2 \ \ x = \frac{3\pi}{4} + 4\pi = \frac{19\pi}{4}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z; \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$

б) $\frac{9\pi}{2}; \frac{19\pi}{4}; \frac{11\pi}{2}.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

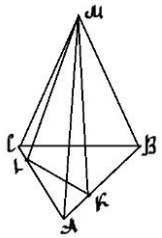
Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №1 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

13 В правильной треугольной пирамиде MABC боковые ребра равны 10, а сторона основания равна 12. Точки K и L делят стороны основания AB и AC соответственно так, что AK : KB = CL : LA = 1 : 5.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MKL являемтся равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MKL.

Решение.

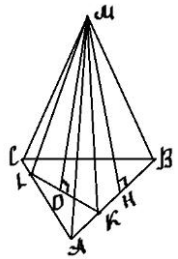


а)

1. Найдём отрезки по сторонам основания пирамиды. Т.к. сторона основания равна 12 и AK : KB = CL : LA = 1 : 5, то CL = 2, LA = 10, AK = 2, KB = 10.

2. $\Delta CML = \Delta AMK$ (по двум сторонам и углу между ними, т.к CL = AK = 2, CM = AM и $\angle MCL = \angle MAK$ по свойству правильной пирамиды)

3. Значит $ML = MK \Longrightarrow$ сечение пирамиды плоскостью MKL являемтся равнобедренным треугольником LMK с основанием LK.



б)

1. Проведём высоту MH к основанию AB.

$AH = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (по свойству равнобедренного ΔAMB)

Найдём MH - катет в прямоугольном ΔAMH , по т. Пифагора:

$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

2. KH = AH - AK = 6 - 2 = 4

Найдём MK - гипотенузу в прямоугольном ΔKMH , по т. Пифагора:

$MK = \sqrt{KH^2 + MH^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$

3. Расмотрим ΔALK:

$\angle A = 60°$ (свойство равностороннего ΔACB по условию)

Найдём LK по теореме косинусов:

$LK^2 = AL^2 + AK^2 - 2 \cdot AL \cdot AK \cdot \cos A$

$LK^2 = 10^2 + 2^2 - 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 100 + 4 - 40 \cdot \frac{1}{2} = 84$

$LK = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

4. В ΔLMK проведём высоту MD к стороне LK.

$DK = \frac{KL}{2} = \frac{\sqrt{84}}{2} = \frac{2\sqrt{21}}{2} = \sqrt{21}$ (по свойству равнобедренного треугольника)

Найдём MD - катет в прямоугольном ΔDMK , по т. Пифагора:

$MD = \sqrt{MK^2 - DK^2} = \sqrt{\sqrt{80}^2 - \sqrt{21}^2} = \sqrt{59}$

5. $S_{LMK} = \frac{1}{2} \cdot LK \cdot MD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21} \cdot \sqrt{59} = \sqrt{1239}$

Ответ: $\sqrt{1239}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №1 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

14 Решите неравенство

$$\frac{\log_8 x}{\log_8\left(\frac{x}{64}\right)} \geq \frac{2}{\log_8 x} + \frac{3}{\log_8^2 x - \log_8 x^2}.$$

Решение.

$$\frac{\log_8 x}{\log_8 x - \log_8 64} \geq \frac{2}{\log_8 x} + \frac{3}{\log_8^2 x - \log_8 x^2}$$

$$\frac{\log_8 x}{\log_8 x - 2} \geq \frac{2}{\log_8 x} + \frac{3}{\log_8^2 x - 2\log_8 x}$$

Заменим $\log_8 x$ на t, при этом $x > 0$:

$$\frac{t}{t-2} \geq \frac{2}{t} + \frac{3}{t^2 - 2t}$$

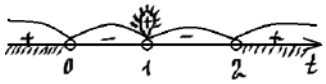
$$\frac{t}{t-2} - \frac{2}{t} - \frac{3}{t(t-2)} \geq 0$$

$$\frac{t^2 - 2(t-2) - 3}{t(t-2)} \geq 0$$

$$\frac{t^2 - 2t + 1}{t(t-2)} \geq 0$$

$$\frac{(t-1)^2}{t(t-2)} \geq 0$$

Нули: $t = 1, t \neq 0, t \neq 2$

Знакопостоянство: 

Решение: $t < 0, t = 1, t > 2$

Обратная замена. Учитывая, что $x > 0$, решим системы:

$$\begin{cases} \log_8 x < 0 \\ x > 0 \end{cases} \begin{cases} x < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Longrightarrow x \in (0; 1)$$

$\begin{cases}\log_8 x = 1\\ x > 0\end{cases}\begin{cases}x = 8\\ x > 0\end{cases}\Longrightarrow x \in \{8\}$

$\begin{cases}\log_8 x > 2\\ x > 0\end{cases}\begin{cases}x > 64\\ x > 0\end{cases}\Longrightarrow x \in (64; +\infty)$

Ответ: $(0; 1) \cup \{8\} \cup (64; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -12 и/или 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на срок 10 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.
Найдите наименьшую возможную ставку r, если известно, что последний платёж будет не менее 0,92 млн рублей.

Решение.

Пусть S - сумма взятая в кредит равная 8 млн. рублей.

По условию, долг перед банком на начало июля каждого года должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$S;\ \frac{9}{10}S;\ \frac{8}{10}S;\ \frac{7}{10}S; \dots;\ \frac{2}{10}S;\ \frac{1}{10}S;\ 0.$

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда долг на январь каждого года равен:

$Sk;\ \frac{9}{10}Sk;\ \frac{8}{10}Sk;\ \frac{7}{10}Sk;\ \dots;\ \frac{2}{10}Sk;\ \frac{1}{10}Sk.$

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №1 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

Следовательно выплаты с февраля по июнь каждого года составляют:

$Sk - \frac{9}{10}S;\ \frac{9}{10}Sk - \frac{8}{10}S;\ \frac{8}{10}Sk - \frac{7}{10}S;\ \dots;\ \frac{2}{10}Sk - \frac{1}{10}S;\ \frac{1}{10}Sk.$

По условию, последний платёж будет не менее 0,92 млн. рублей, значит:

$\frac{1}{10}Sk \geq 0{,}92$

По условию S = 8 млн. рублей. Найдём k:

$\frac{1}{10}8k \geq \frac{92}{100}$

$80k \geq 92$

$k \geq \frac{92}{80}$

$k \geq \frac{23}{20}$

Найдём r:

$1 + \frac{r}{100} \geq \frac{23}{20}$

$\frac{r}{100} \geq \frac{3}{20}$

$r \geq 15$

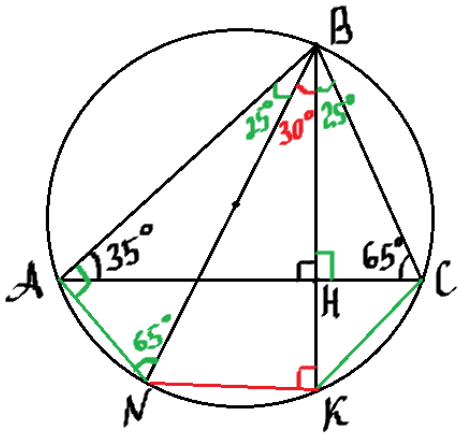
Наименьшее решение этого неравенства - число 15. Значит искомое число процентов - 15.

Ответ: 15.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Около остроугольного треугольника ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN. Высота BH пересекает эту окружность в точке K. Известно, что угол BAC равен 35°, угол ACB равен 65°.
а) Докажите, что AN = CK.
б) Найдите KN, если радиус окружности равен 12.

Решение.



а)

1. $\angle BNA = \angle BCA = 65°$ (как опирающиеся на одну и ту же дугу AB)

Расмотрим ΔABN:

$\angle BAN = 90°$ (вписанный угол на полуокружность)

$\angle ABN = 90° - \angle BNA = 90° - 65° = 25°$ (по свойству прямоугольного треугольника)

2. В ΔHBC: $\angle HBC = 90° - \angle BCH = 90° - 65° = 25°$ (по свойству прямоугольного треугольника)

3. $\Longrightarrow \angle ABN = \angle KBC \Longrightarrow$ равны дуги на которые опираются эти углы: $\cup AN = \cup KC \Longrightarrow$ равны хорды стягивающие эти дуги: $AN = CK$ ч.т.д.

б)

1. В ΔABC: $\angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle BCA) = 180° - (35° + 65°) = 80°$

2. $\angle NBK = \angle ABC - (\angle ABN + \angle KBC) = 80° - (25° + 25°) = 30°$

3. Расмотрим ΔNBK:

$\angle NKB = 90°$ (вписанный угол на полуокружность)

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №1 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

Диаметр равен удвоенному радиусу $NB = 2 \cdot r = 2 \cdot 12 = 24$

$KN = \frac{NB}{2} = \frac{24}{2} = 12$ (как катет лежащий напротив угла в 30°)

Ответ: 12.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy-9y+5x+20)\sqrt{x+5}}{\sqrt{7-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Преобразуем: $y^2 - xy - 9y + 5x + 20 = y^2 - xy - 4y - 5y + 5x + 20 =$

$y(y - x - 4) - 5(y - x - 4) = (y - 5)(y - x - 4)$

Имеем: $\frac{(y-5)(y-x-4)\sqrt{x+5}}{\sqrt{7-y}} = 0$

Равенство выполняется при $y = 5, y = x + 4, x = -5$

Условия ограничений в подкоренных выражениях: $x \geq -5, y < 7$

Перейдём к равносильной системе:

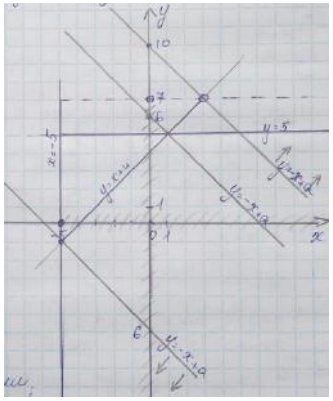
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 5 \\ y = x + 4 \\ x = -5 \end{array}\right. \\ x \geq -5 \\ y < 7 \end{cases}$$

$a = x + y$

$y = -x + a$

a - свободный член в линейной убывающей функции. Т.к. $|k| = 1$, то угол наколона y графика 45°, а значение a - это единицы переноса графика по оси ординат и точка пересечения с осью ординат.

Изобразим графически данные зависимости и определим нужные значения a:



По графику видим, что исходная система уравнений имеет единственное решение при

$a \geq 10,\ a = 6,\ a \leq -6$

Ответ: $(-\infty;-6] \cup \{6\} \cup [10;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Тренировочный вариант ЕГЭ 2022 г. - №1 МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень

18 На доске написано несколько различных натуральных чисел, в записи которых могут быть только цифры 4 и 9 (возможно, только одна из этих цифр).

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 107?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 289?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 3986?

Решение. Числа могут быть: 4, 9, 44, 49, 94, 99, 444, 449, 494, 499, 944, 949, 994, 999 и т.д. Заметим, что каждое из этих чисел на 1 единицу меньше числа кратного пяти. Так же есть пары с разницей в пять единиц.

а) Число 107 на 3 единицы меньше числа 110, которое кратно пяти. Значит сумма может быть составлена из трёх чисел. Возьмём самое большое число в пределах 107-ми. Это число - 99. До 107-ми не хватает 8. Нам нужно прибавить еще два числа и их сумма не может быть 8.

Значит возьмем число - 94. До 107-ми не хватает 13, которые восполнят числа 4 и 9. В итоге: 94 + 9 + 4 = 107.

б) Число 289 на 1 единицу меньше числа кратного пяти. Но одним числом данная сумма не может быть сложена. Значит сумма может быть сложена 6-ю числами. В пределах 289-ти всего 6 чисел. Сложим их: 4 + 9 + 44 + 49 + 94 + 99 = 299. Сумма не равна 289, а других вариантов нет.

в) Число 3986 на 4 единицы меньше числа кратного пяти. Чтобы найти наименьшее количество чисел, сумма которых равна 3986, сложим самые крупные 4 числа: 999 + 994 + 949 + 944 = 3886. Видим, что не хватает 100 единиц. Значит попробуем сложить данную сумму из 9-ти чисел. При этом вместо нескольких крупных возьмем все средние. Получаем: 999 + 994 + 499 + 494 + 449 + 444 = 3879. Не хватает 107-ми. Из пункта а известно как сложить данную сумму, как раз из трёх чисел. В итоге: 999 + 994 + 499 + 494 + 449 + 444 + 94 + 9 + 4 = 3986 - сложено из 9-ти чисел.

Ответ: а) Да; б) Нет; в) 9 чисел.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*