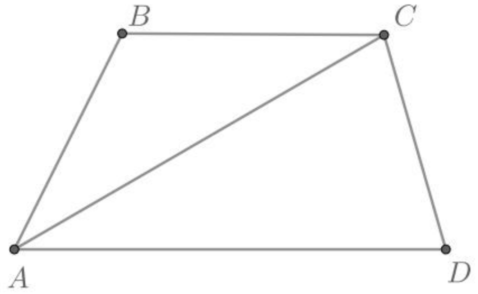
Пробный ЕГЭ №1 по математике. Вариант легче уровня ЕГЭ 2023

1. Найдите больший угол равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной AB углы, равные 46° и 1° соответственно. Ответ дайте в градусах.



Решение.

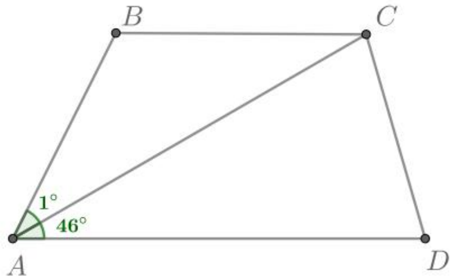
Найдем угол BAD:

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 1^\circ + 46^\circ = 47^\circ$$

Так как $ABCD$ — равнобедренная трапеция,

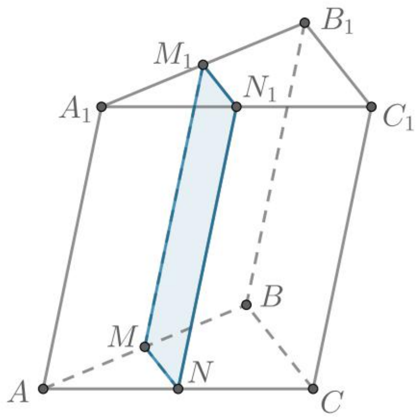
$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$$

Значит больший угол равен 133°.



Ответ: 133

2. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен 5. Найдите объем исходной призмы.



Решение.

Пусть S — площадь основания треугольной призмы, а h — ее высота. Тогда объем треугольной призмы равен $V = Sh$.

Рассмотрим отсеченную призму. Ее высота равна высоте изначальной треугольной призмы, то есть равна h. MN — средняя линия треугольника ABC, поэтому треугольник AMN, лежащий в основании отсеченной призмы, подобен с коэффициентом 2 треугольнику ABC, лежащему в основании изначальной призмы, по отношению сторон ($AM : AB = AN : AC = 1 : 2$) и общему углу между ними. Тогда площадь треугольника AMN в $2^2 = 4$ раза меньше площади треугольника ABC.

Значит, объем отсеченной призмы равен:

$$V_o = \frac{1}{4}Sh = \frac{1}{4}V \;\Rightarrow\; V = 4V_o = 4 \cdot 5 = 20$$

Ответ: 20

3. В фирме такси в наличии 45 легковых автомобилей; 18 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Решение.

Всего автомобилей желтого цвета с черными надписями будет $45 - 18 = 27$. Вероятность того, что такая машина приедет на вызов, равна отношению благоприятных исходов к числу всех исходов. Всего исходов — 45, благоприятных — 27. Тогда вероятность равна:

$$\frac{27}{45} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Ответ: $0,6$

4. В коробке 11 синих, 6 красных и 8 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Решение.

Будем считать, что фломастеры выбираются по очереди, тогда нам подходят два случая:

- Сначала оказался выбран красный фломастер, а затем синий. Вероятность первым выбрать красный равна $\frac{6}{25}$, а выбрать вторым синий при условии, что первым был выбран красный, равна $\frac{11}{24}$ (в знаменателе 24, т.к. после первого выбора фломастеров стало на 1 меньше). Итого:

$$p_{\text{кс}} = \frac{6}{25} \cdot \frac{11}{24} = \frac{66}{25 \cdot 24} = 0,11$$

- Сначала оказался выбран синий фломастер, а затем красный. Вероятность первым выбрать синий равна $\frac{11}{25}$, а выбрать вторым красный при условии, что первым был выбран синий, равна $\frac{6}{24}$ (в знаменателе 24, т.к. после первого выбора фломастеров стало на 1 меньше). Итого:

$$p_{\text{КС}} = \frac{11}{25} \cdot \frac{6}{24} = \frac{66}{25 \cdot 24} = 0,11$$

Сложив вероятности интересующих нас случаев, получаем $0,22$.

Ответ: $0,22$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4$$

Решение.

$$\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4 \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6 - 4x - x^2 = (x+4)^2 \\ x + 4 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 + 12x + 10 = 0 \\ x \geqslant -4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -5 \end{array}\right. \\ x \geqslant -4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1.$$

Ответ: -1

6. Найдите значение выражения

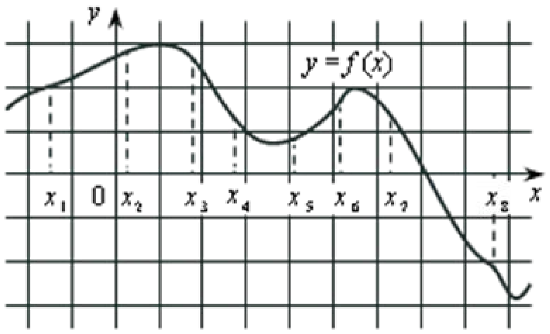
$$\frac{(9x^2 - 4) \cdot (81x^4 + 36x^2 + 16)}{27x^3 - 8} - 27x^3$$

Решение.

$$\frac{(9x^2 - 4) \cdot (81x^4 + 36x^2 + 16)}{27x^3 - 8} - 27x^3 = \frac{(9x^2 - 4) \cdot ((9x^2)^2 + 9x^2 \cdot 4 + 4^2)}{27x^3 - 8} - 27x^3 =$$
$$= \frac{(9x^2)^3 - 4^3}{27x^3 - 8} - 27x^3 = \frac{(3^2x^2)^3 - (2^2)^3}{27x^3 - 8} - 27x^3 =$$
$$= \frac{(3^3x^3)^2 - (2^3)^2}{27x^3 - 8} - 27x^3 = \frac{(27x^3)^2 - (8)^2}{27x^3 - 8} - 27x^3 =$$
$$= \frac{(27x^3 + 8) \cdot (27x^3 - 8)}{27x^3 - 8} - 27x^3 = 27x^3 + 8 - 27x^3 =$$
$$= 8$$

Ответ: 8

7. На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Решение.

Производная функции в точке положительна, если функция в этой точке возрастает. Значит, $f'(x) > 0$ в точках x_1, x_2, x_5 и x_6.

Ответ: 4

8. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением:

$$p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$$

Где p_1 и p_2 — давление газа в атмосферах в начальном и конечном состояниях соответственно, V_1 и V_2 — объём газа в литрах в начальном и конечном состояниях соотвественно. Изначально объём газа равен 224 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

Решение.

По условию $p_1 = 1$ и $V_1 = 224$. Требуется узнать объём газа, если $p_2 = 128$, тогда:

$$p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4} \;\Rightarrow\; V_2^{1,4} = \frac{p_1}{p_2} \cdot V_1^{1,4}$$

Отсюда искомый объем равен:

$$V_2 = \left(\frac{1}{128}\right)^{\frac{10}{14}} \cdot V_1 = \left(\frac{1}{2^7}\right)^{\frac{5}{7}} \cdot 224 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7\cdot 5}{7}} \cdot 32 \cdot 7 = \frac{1}{2^5} \cdot 2^5 \cdot 7 = 7$$

Ответ: 7

9. Два шоколадных батончика дешевле пирожного на 10%. На сколько процентов три батончика дороже пирожного?

Решение.

Пусть b — цена батончика, p — цена пирожного, тогда:

$$\frac{90}{100} \cdot p = 2b$$

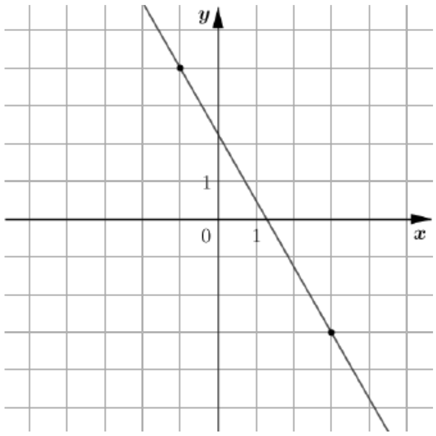
Откуда находим $b = \dfrac{45}{100}p$, значит, $3b = \dfrac{135}{100}p = p\left(1 + \dfrac{35}{100}\right)$, то есть три батончика дороже пирожного на 35%.

Ответ: 35

10. На рисунке изображён график функции

$$y = kx + b$$

Найдите значение x, при котором $y = -20,5$.



Решение.

Заметим, что графику принадлежат точки $(-1; 4)$ и $(3; -3)$. Найдём угловой коэффициент как тангенс угла наклона прямой:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3-4}{3-(-1)} = -\frac{7}{4}$$

Получим уравнение линейной функции

$$y = -\frac{7}{4}x + b$$

Подставим в это уравнение точку $(3; -3)$:

$$-3 = -\frac{7}{4} \cdot 3 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 2\frac{1}{4}$$

Найдём искомое значение x, решив уравнение $y = -20,5$:

$$-20,5 = -\frac{7}{4}x + 2,25 \quad \Leftrightarrow \quad x = 13$$

Ответ: 13

11. Найдите точку максимума функции

$$y = \sqrt{-x^2 + 2 - 6x}$$

Решение.

ОДЗ: $-x^2 + 2 - 6x \geqslant 0$, что равносильно $x^2 + 6x - 2 \leqslant 0$, откуда находим $-3 - \sqrt{11} \leqslant x \leqslant -3 + \sqrt{11}$. Решим на ОДЗ:

- Найдём производную:

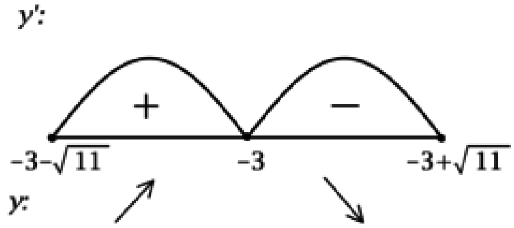
$$y' = \frac{-2x-6}{2\sqrt{-x^2+2-6x}} = -\frac{x+3}{\sqrt{-x^2+2-6x}}.$$

- Найдём критические точки (то есть внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна 0 или не существует):

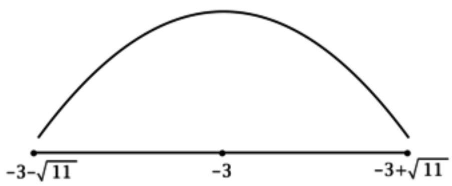
$$y' = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{x+3}{\sqrt{-x^2+2-6x}} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x+3=0$$

— на ОДЗ, откуда находим $x = -3$. Для того, чтобы найти точки локального максимума/минимума функции, нужно понять, как схематично выглядит её график.

- Найдём промежутки знакопостоянства y' на ОДЗ:



- Эскиз графика y:



Таким образом, $x = -3$ — точка максимума функции y.

Ответ: -3

12.

а) Решите уравнение $\dfrac{14}{x^2-4} + \dfrac{3}{(2-x)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\sqrt{10}; \sqrt{2,3}\right]$.

Решение.

а) ОДЗ данного уравнения: $x \neq \pm 2$. Решим уравнение, разложив на множители знаменатели и домножив обе части уравнения на общий знаменатель всех дробей.

$$\frac{14}{x^2-4} + \frac{3}{(2-x)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$\frac{14}{(x-2)(x+2)} + \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} \quad \Big| \cdot (x-2)^2(x+2)^2$$

$$
\begin{aligned}
14(x-2)(x+2)+3(x+2)^2 =&5(x-2)^2\\
14(x^2-4)+3(x^2+4x+4) =&5(x^2-4x+4)\\
14x^2-56+3x^2+12x+12 =&5x^2-20x+20\\
12x^2+32x-64 =&0 \quad \Big| \ :4\\
3x2+8x-16 =&0\\
D=8^2+4\cdot 3\cdot 16=8^2(1+3) =&8^2\cdot 2^2=16^2.\\
x_{1,2}=\frac{-8\pm 16}{6} =&-4; \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

б) Определим, используя метод оценки:

$$-4=-\sqrt{16}<-\sqrt{10}<0<\frac{4}{3}<1,5=\sqrt{2,25}<\sqrt{2,3}.$$

Таким образом, подойдет только корень $\frac{4}{3}$.

Ответ: **а)** $-4, \frac{4}{3}$; **б)** $\frac{4}{3}$.

13. *(ЕГЭ 2019)* В правильном тетраэдре $ABCD$ точки K и M — середины рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой AD.

а) Докажите, что сечение тетраэдра плоскостью α — квадрат;

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, если $AB=2\sqrt{3}$.

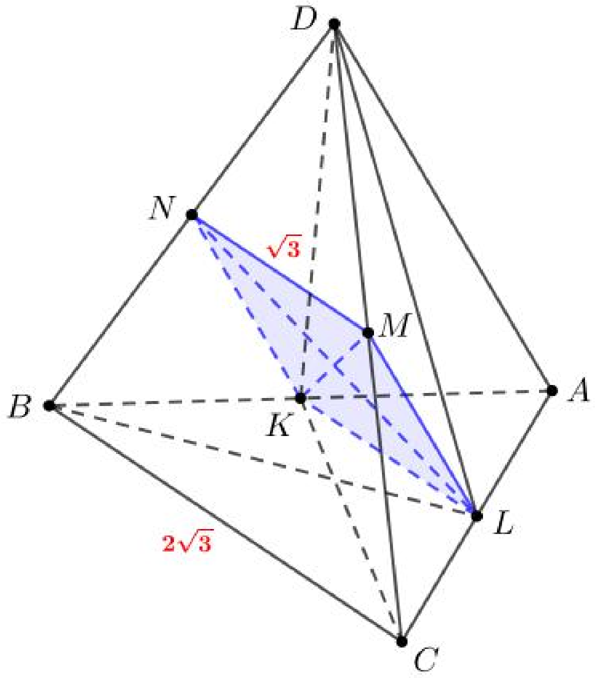
Решение.

а) Пусть точки L, N — середины ребер AC и BD соответственно. Тогда ML — средняя линия треугольника ACD, значит, $ML \parallel AD$. Аналогично $NK \parallel AB$, следовательно $NK \parallel ML$.

Значит, точки N, K, M, L лежат в одной плоскости, которая параллельна прямой AD, следовательно, это и есть плоскость α.

Так как тетраэдр правильный, его грани — это равные правильные треугольники. Тогда их средние линии попарно равны, в частности, $NM=ML=KL=NK$, значит, $KLMN$ — ромб.

Рассмотрим треугольники BLD и CKD. В них $BD=CD$ и $BL=DL=CK=DK$, так как тетраэдр $ABCD$ правильный. Тогда $\triangle BLD=\triangle CKD$ по третьему признаку равенства треугольников. В равных треугольниках соответственные элементы равны, значит, равны и их медианы, то есть $LN=KM$. Следовательно, $KLMN$ — квадрат.



б) Площадь квадрата $KLMN$ равна

$$S_{KLMN} = KL^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

Ответ: **б)** 3.

14. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{x-2}{x-3}\right) : \left(\frac{1}{\dfrac{x+3}{x+2} - \dfrac{1}{2}} + 1\right) \geqslant 0$$

Решение.

Запишем ОДЗ: $\begin{cases} x-3 \neq 0 \\ \dfrac{1}{\dfrac{x+3}{x+2} - \dfrac{1}{2}} + 1 \neq 0 \\ \dfrac{x+3}{x+2} - \dfrac{1}{2} \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ \dfrac{x+3}{x+2} - \dfrac{1}{2} \neq -1 \\ \dfrac{x+3}{x+2} \neq \dfrac{1}{2} \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -\dfrac{8}{3} \\ x \neq -4 \\ x \neq -2 \end{cases}.$

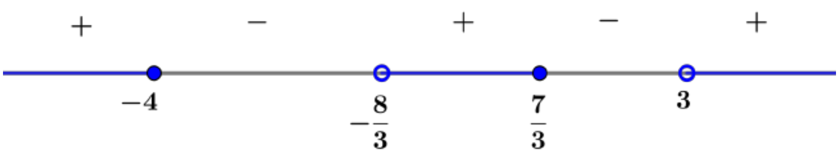
Упростим выражение в левой части:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{x-2}{x-3}\right):\left(\frac{1}{\frac{x+3}{x+2}-\frac{1}{2}}+1\right)=\frac{(x-3)+2(x-2)}{2(x-3)}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\frac{2(x+3)-(x+2)}{2(x+2)}}+1}=$$

$$=\frac{3x-7}{2(x-3)}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\frac{x+4}{2(x+2)}}+1}=\frac{3x-7}{2(x-3)}\cdot\frac{1}{\frac{2(x+2)}{x+4}+1}=$$

$$=\frac{3x-7}{2(x-3)}\cdot\frac{1}{\frac{2(x+2)+x+4}{x+4}}=\frac{3x-7}{2(x-3)}\cdot\frac{x+4}{3x+8}.$$

Получим неравенство: $\dfrac{3x-7}{2(x-3)}\cdot\dfrac{x+4}{3x+8}\geqslant 0$. По методу интервалов получим:



Учитывая ОДЗ, из полученного множества решений надо отбросить точки -4 и -2.

Ответ: $x\in(-\infty;-4)\cup\left(-\frac{8}{3};-2\right)\cup\left(-2;\frac{7}{3}\right]\cup(3;+\infty)$.

15. 1-го августа 2022 года планируется взять кредит на 3 года на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– в январе каждого года долг возрастает на некоторое число процентов по сравнению с концом предыдущего года;

– в июле каждого года должна быть сделана выплата;

– 1-го августа каждого года, кроме первого, долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 1-е августа предыдущего года;

– к концу июля 2025 года долг должен быть полностью погашен.

Известно, что процентная ставка в каждый год, кроме первого, ровно на 1% больше процентной ставки в предыдущем году. Найдите наибольшее значение процентной ставки в первый год, если переплата по данному кредиту не превосходит трети от изначально взятой суммы.

Решение.

Так как кредит взят в августе 2022 года, в этот год не производятся никакие выплаты и не начисляются проценты.

Обозначим размер кредита через S, а процентную ставку за первый год через p. При этом каждый год процентная ставка увеличивается на 1. Кредит взят на 3 года, то есть в январе 2023-го года сумма долга увеличится на $p\%$, в январе 2024-го года — на $(p+1)\%$, в январе 2025-го года — на $(p+2)\%$.

1-го августа каждого года, кроме первого, долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 1-е августа предыдущего года. Обозначим эту величину за B. Таким образом, сумма долга после выплаты в 2023-ем году составит $S-B$, в 2024-ом году $S-2B$, в 2025-ом году $S-3B$. При этом в 2025-ом году долг должен быть погашен, то есть $S-3B=0 \;\Rightarrow\; B=\frac{1}{3}S$. Отсюда получим, что сумма долга после выплаты в 2023-ем году равна $S-B=S-\frac{1}{3}S=\frac{2}{3}S$, в 2024-ом $S-2B=S-\frac{2}{3}S=\frac{1}{3}S$.

Составим таблицу с учетом этих данных. При этом значение в столбце "Выплата" будет равно разности соответствующих значений в столбцах "Сумма долга после начисления %" и "Сумма долга после выплаты".

год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
2023	S	$S+\frac{p}{100}\cdot S$	$\frac{2}{3}S$	$S+\frac{p}{100}\cdot S-\frac{2}{3}S$
2024	$\frac{2}{3}S$	$\frac{2}{3}S+\frac{p+1}{100}\cdot\frac{2}{3}S$	$\frac{1}{3}S$	$\frac{2}{3}S+\frac{p+1}{100}\cdot\frac{2}{3}S-\frac{1}{3}S$
2025	$\frac{1}{3}S$	$\frac{1}{3}S+\frac{p+2}{100}\cdot\frac{1}{3}S$	0	$\frac{1}{3}S+\frac{p+2}{100}\cdot\frac{1}{3}S-0$

По условию переплата по кредиту не превосходит $\frac{1}{3}S$. При этом переплата равна разности суммы выплат (сумма по столбцу "Выплата") и изначальной суммы кредита S. Выпишем это в виде неравенства:

$$\left(S+\frac{p}{100}\cdot S-\frac{2}{3}S+\frac{2}{3}S+\frac{p+1}{100}\cdot\frac{2}{3}S-\frac{1}{3}S+\frac{1}{3}S+\frac{p+2}{100}\cdot\frac{1}{3}S-0\right)-S\leqslant\frac{1}{3}S$$

$$\frac{p}{100}\cdot S+\frac{p+1}{100}\cdot\frac{2}{3}S+\frac{p+2}{100}\cdot\frac{1}{3}S\leqslant\frac{1}{3}S$$

$$3Sp+2S(p+1)+S(p+2)\leqslant 100S$$

$$3p+2(p+1)+(p+2)\leqslant 100$$

$$6p\leqslant 96$$

$$p\leqslant 16$$

Таким образом, максимально возможная процентная ставка по кредиту за первый год составляет 16%.

Ответ: 16%

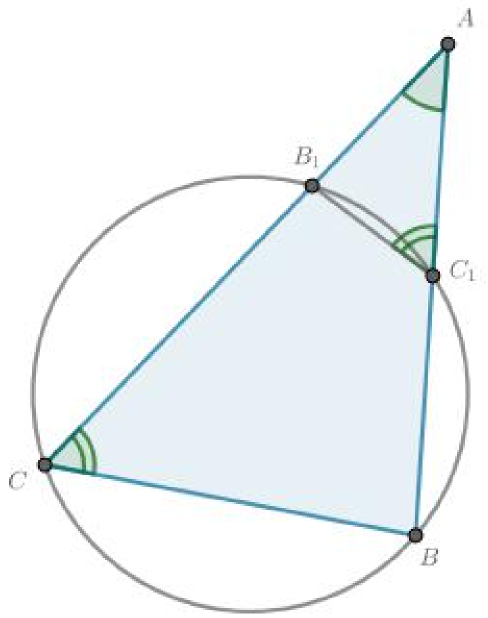
16. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A = 45°$, $B_1C_1 = 6$ и площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

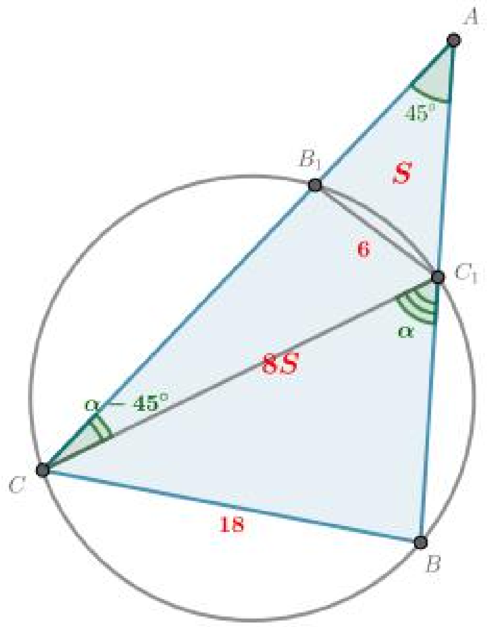
Решение.

а) Четырехугольник BCB_1C_1 вписанный $\Rightarrow \angle BCB_1 + \angle B_1C_1B = 180° = \angle B_1C_1B + \angle B_1C_1$
Тогда $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ по двум углам ($\angle BCA = \angle B_1C_1A$, $\angle A$ — общий).



б) Пусть коэффициент подобия треугольников ABC и AB_1C_1 равен k. Тогда $S_{ABC} : S_{AB_1C_1}$
$k = 3$. Из подобия $BC = 3B_1C_1 = 18$.

По условию $\angle A = 45°$. Обозначим угол CC_1B через α, он внешний в треугольнике $CAC_1 \Rightarrow \angle ACC_1 = \angle CC_1B - \angle CAC_1 = \alpha - 45°$. Обозначим искомый радиус R.



Запишем следствие из теоремы синусов для треугольников CB_1C_1 и CC_1B (у них общая описанная окружность)

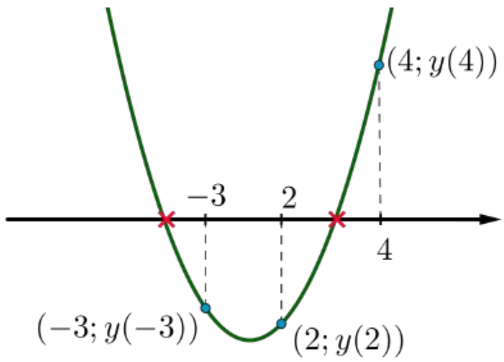
$$\frac{B_1C_1}{\sin\angle B_1CC_1} = 2R = \frac{CB}{\sin\angle CC_1B}$$
$$\frac{6}{\sin(\alpha - 45^\circ)} = 2R = \frac{18}{\sin\alpha}$$
$$\sin(\alpha - 45^\circ) = \frac{\sin\alpha}{3}$$
$$\sin\alpha\cos(-45^\circ) + \sin(-45^\circ)\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{3}$$
$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\alpha$$
$$\sin\alpha\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \cos\alpha$$
$$\alpha < 180^\circ \Rightarrow \sin\alpha > 0,\ \text{тогда}$$
$$\sqrt{1-\cos^2\alpha}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \cos\alpha, \quad \text{ОДЗ } \cos\alpha \geqslant 0$$
$$(1-\cos^2\alpha)\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{9}\right) = \cos^2\alpha$$
$$(20 - 6\sqrt{2}) = \cos^2\alpha(29 - 6\sqrt{2})$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{20-6\sqrt{2}} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{9}{20-6\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{20-6\sqrt{2}}}$$
$$\boldsymbol{R} = 3\sqrt{20-6\sqrt{2}}.$$

Ответ: **б)** $18,\ 3\sqrt{20-6\sqrt{2}}$.

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых один корень уравнения $x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$ — заключен в промежутке $[2; 4)$, а другой удовлетворяет неравенству $x \leqslant -3$.

Решение.

Рассмотрим параболу $y = x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5$. Это парабола с ветвями вверх. $D = 4(a+1)^2 - 4(9a-5) > 0$, откуда $a = (-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$. Тогда уравнение имеет два корня. Рассмотрим картинку, которая нам подходит.



Заметим, что число -3 может находиться во II и в III местах. Число 2 может находиться в III или IV месте. А число 4 только в V месте.

Случаи, когда один из корней попадает в II или в IV место, рассмотрим отдельно. Это значит, что один из корней уравнения равен -3 или 2. Проверим, при каких a это происходит:

$$x_1 = -3 \Rightarrow 9 + 6(a+1) + 9a - 5 = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = 2(a+1) - (-3) = \frac{11}{3} \in (2;4)$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow 4 - 4(a+1) + 9a - 5 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow x_1 = 2(a+1) - 2 = 2 > -3$$

Следовательно, случай $a = -\frac{2}{3}$ нам подходит, а случай $a = 1$ – нет.

Теперь можно считать, что число -3 должно находиться в III местах. Число 2 должно находиться в III месте. А число 4 только в V месте. Это задается следующей системой:

$$\begin{cases} D > 0 \\ y(-3) < 0 \\ y(2) < 0 \\ y(4) > 0 \end{cases}$$

Заметим, что условие на дискриминант здесь не обязательно, так как если хотя бы в одной точке для параболы с ветвями вверх значение функции отрицательно, то автоматически парабола пересекает ось абсцисс в двух точках. Также здесь не нужно условие на абсциссу вершины, так как число 4 не может попасть в I место, иначе оно было бы меньше -3.

Решая систему и объединяя с предыдущим найденным значением, получаем $a \in \left(-3; -\frac{2}{3}\right]$.

Расшифровка:

I – до левого корня,

II – в левом корне,

III – между корнями,

IV – в правом корне,

V – правее правого корня.

Ответ: $a \in \left(-3; -\frac{2}{3}\right]$.

18. Назовем натуральное число хорошим, если в нем можно переставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 11.

а) Является ли число 1234 хорошим?

б) Является ли число 12345 хорошим?

в) Найти наибольшее хорошее число, состоящее из различных нечетных цифр.

Решение.

Число делится на 11, если разность суммы цифр в нечетных разрядах и суммы цифр в четных делится на 11.

а) Нам нужно составить такое число, чтобы разность его суммы цифр в нечетных разрядах и суммы цифр в четных делилась на 11. Попробуем сделать так, чтобы такая разность была равна 0. Заметим, что

$$(3+2)-(4+1)=0$$

Тогда можем составить число $4312 = 11 \cdot 392$.

б) Рассмотрим какое значение может принимать разность суммы цифр в нечетных разрядах и суммы цифр в четных, если мы можем переставлять только цифры 1, 2, 3, 4 и 5.

Так как в итоге будет получаться пятизначное число, то на нечетных местах стоят 3 цифры, а на четных — 2. Тогда разность максимальна, если на нечетных местах стоят три наибольшие цифры, а на четных — две наименьшие, то есть

$$max = (5+4+3)-(2+1) = 12-3 = 9$$

Аналогично оценим минимальную разность. Если на нечетных местах стоят три наименьшие цифры, а на четных — две наибольшие, то разность минимальна, то есть

$$min = (1+2+3)-(4+5) = 6-9 = -3$$

Значит, если из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 можно составить число, которое делится на 11, то разность суммы цифр в нечетных разрядах и суммы цифр в четных должна быть равна 0, то есть сумма цифр в нечетных разрядах равна сумме цифр в четных. Это значит, что сумма всех цифр должна быть четной, но $1+2+3+4+5 = 15$. Следовательно, 12345 не является хорошим числом.

в) Докажем, что число, составленное из всех пяти нечетных цифр, не будет делиться на 11. Предположим обратное, пусть такое число можно составить. Пусть a — сумма его цифр, стоящих в нечетных разрядах, а b — сумма цифр в четных разрядах. Тогда

$$a+b = 1+3+5+7+9 = 25$$

Понятно, что на нечетных местах стоят ровно три нечетные цифры, поэтому a — нечетное число. Тогда b — четное. Значит, разность $a-b$ — нечетное число. Так как мы предположили, что составленное нами число делится на 11, то $a-b$ тоже кратно 11.

Оценим a: сумма цифр в нечетных разрядах минимальна, если сами цифры в них минимальны, тогда $a \geqslant 1+3+5 = 9$. Сумма цифр в нечетных разрядах максимальна, если сами цифры в них максимальны, тогда $a \leqslant 9+7+5 = 21$.

Аналогично оценим b и получим, что $4 \leqslant b \leqslant 16$. Тогда

$$9-16 \leqslant a-b \leqslant 21-4 \;\Leftrightarrow\; -7 \leqslant a-b \leqslant 17$$

Следовательно, если $a-b$ кратно 11, то $a-b=11$, так как $a-b$ должно быть нечетным. Значит, можем составить систему:

$$\begin{cases} a+b=25 \\ a-b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=18 \\ b=7 \end{cases}$$

Заметим, что b никогда не может быть равно 7, так как b должно быть четным. Тогда не существует числа, состоящего из всех пяти нечетных цифр, которое делится на 11.

Рассмотрим наибольшее четырехзначное число, состоящее из различных нечетных цифр. Это число 9753. Заметим, что

$$(9+3)-(7+5)=0 \;\Rightarrow\; 9735=11\cdot 885$$

Значит, число 9753 является хорошим, так как число 9735 кратно 11.

Ответ: **а)** Да; **б)** Нет; **в)** 9753.