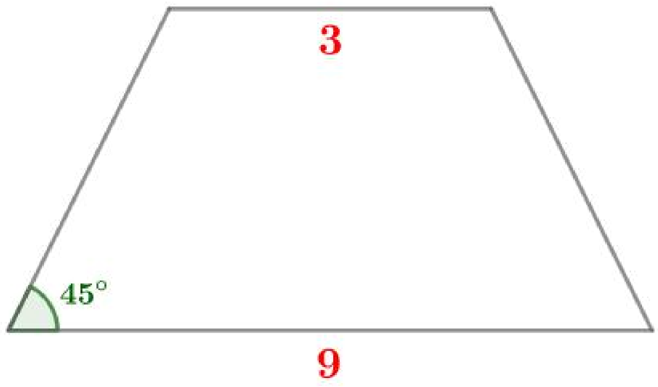
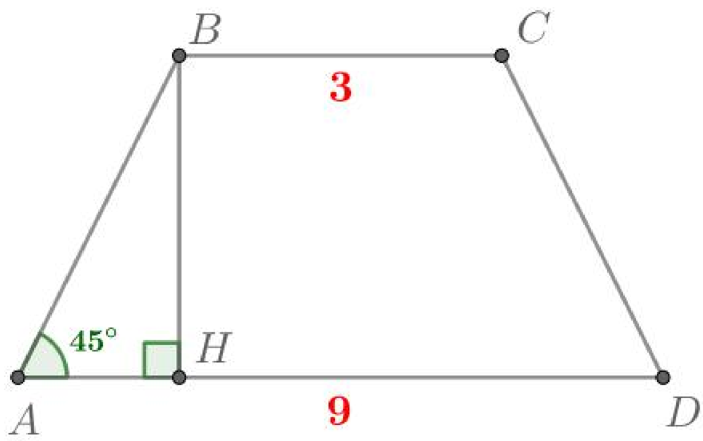
Пробник №2. Решения

1. В равнобедренной трапеции основания равны 3 и 9 и угол между боковой стороной и одним из оснований равен 45°. Найдите площадь этой трапеции.



Решение:



Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция из условия, отрезок BH — высота трапеции. Тогда

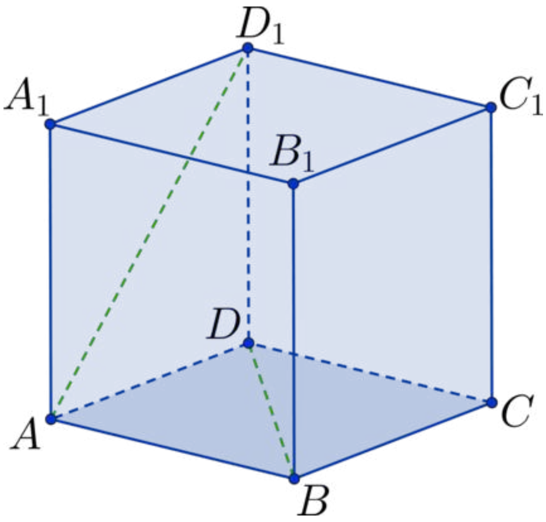
$$AH = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{9-3}{2} = 3$$

Треугольник ABH — прямоугольный, причем $\angle BAH = 45°$, то есть этот треугольник равнобедренный и $BH = AH = 3$.

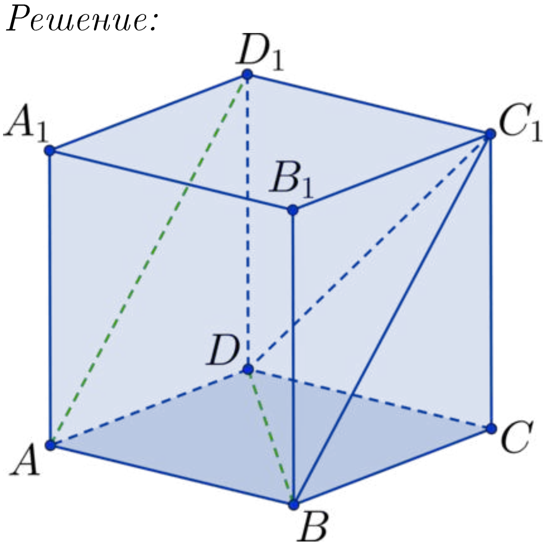
Тогда площадь трапеции равна

$$\frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BH = \frac{1}{2}(3+9) \cdot 3 = 18.$$

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AD_1 и BD. Ответ дайте в градусах.



Решение:



Заметим, что $BC_1 || AD_1$, тогда рассмотрим треугольник $\triangle BDC_1$, в котором необходимо определить $\angle DBC_1$. Он состоит из диагоналей соответствующих квадратов. Так как квадраты между собой равны, то равны и диагонали $\Rightarrow \triangle BDC_1$ – равносторонний треугольник $\Rightarrow \angle DBC_1 = 60°$.

3. Два радиста пытаются принять сигнал радиопередатчика, причем вероятность того, что сигнал не будет принят никем, равна $0,08$. Найдите вероятность, что хотя бы одному из радистов удастся принять сигнал.

Решение: Событие $A =$"хотя бы одному из радистов удастся принять сигнал" означает, что либо первый примет сигнал, а второй — нет, либо второй примет сигнал, а первый — нет, либо оба примут сигнал. Вероятность противоположного события, то есть события $B =$"ни один из радистов не примет сигнал", равна $0,08$. Так как сумма вероятностей противоположных событий равна 1, то $P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0,08 = 0,92$.

4. Игральный кубик бросают три раза. Найдите вероятность того, что в сумме выпало 13 очков при условии, что единица выпала ровно один раз.

Решение: Посчитаем количество исходов, в которых единица выпала ровно один раз (остальные исходы нас не интересуют). Единица могла быть выкинута первым, вторым или третьим броском. Для каждого из этих трех случаев на оставшихся двух кубиках могло выпасть любое значение от 2 до 6 (то есть пять вариантов). Тогда количество таких исходов

$$k = 3 \cdot 5^2 = 75$$

Чтобы при наличии единицы сумма очков была равна 13, на оставшихся двух кубиках должно выпасть число 6. Таких вариантов три:

$$(1; 6; 6),\ (6; 1; 6),\ (6; 6; 1)$$

Тогда искомая вероятность равна

$$p = \frac{3}{75} = 0,04.$$

5. Решите уравнение

$$\log_7(x+18) = 2\log_7(2-x).$$

Решение:

$$\log_7(x+18) = 2\log_7(2-x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2-x>0 \\ \log_7(x+18) = \log_7(2-x)^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x<2 \\ x+18 = (x-2)^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x<2 \\ x^2-5x-14=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x<2 \\ \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x=-2.$$

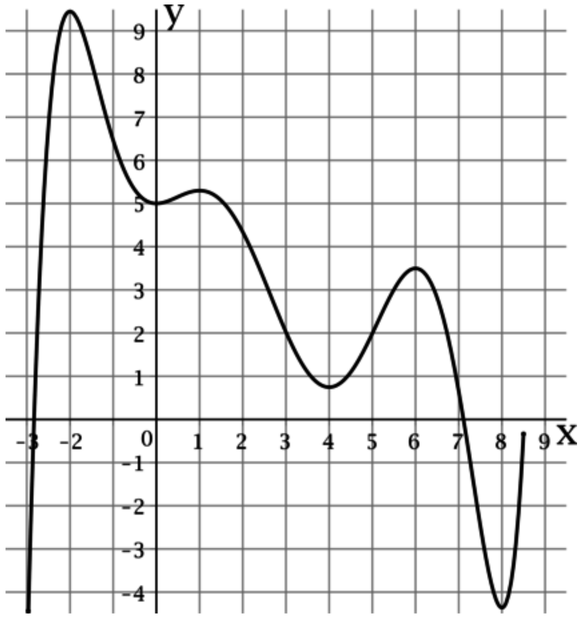
6. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}.$$

Решение: Выделим полный квадрат и извлечем квадратный корень:

$$\sqrt{2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2} + \left|2-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 2.$$

7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8,5)$. Найдите сумму точек экстремума этой функции.



Решение: Точкой экстремума функции называется точка, в которой функция достигает локально минимальное или локально максимальное значение.

По рисунку можно определить, что функция $f(x)$ достигает локально минимальные значения в точках 0, 4 и 8, а локально максимальные значения в точках -2, 1 и 6. Таким образом, сумма точек экстремума этой функции равна $0 + 4 + 8 + (-2) + 1 + 6 = 17$.

8. Объем спроса Q единиц в месяц на продукцию предприятия M зависит от цены P в тыс. руб. по формуле $Q(P) = 29 - P$. Месячная выручка R в тыс. руб. предприятия M вычисляется по формуле $R = P \cdot Q$. Определите наименьшую цену P, при которой месячная выручка R окажется не менее 100 тыс. руб. Ответ дайте в тыс. руб.

Решение: Выразим месячную выручку R через цену P:

$$R = P \cdot Q = 29P - P^2$$

Месячная выручка составит не менее 100 тыс. руб. при цене P, которая может быть найдена из неравенства $29P - P^2 \geqslant 100$, что равносильно

$$P^2 - 29P + 100 \leqslant 0$$

Решим это неравенство методом интервалов. Найдём корни уравнения $P^2 - 29P + 100 = 0$:

$$P_1 = 4, \qquad P_2 = 25$$

Отметим на числовой прямой промежутки знакопостоянства левой части последнего неравенства:

Тогда наименьшая цена, при которой месячная выручка составит не менее 100 тыс. руб., равна 4 тыс. руб.

9. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 63 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, большей скорости первого на 22 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение: Эта задача на вычисление средней скорости. Поскольку автомобилями пройдены равные расстояния за равное время, то скорость первого автомобиля совпадает со средней скоростью второго. Найдём её, исходя из условия. Пусть S км — расстояние между А и В, а первый ехал со скоростью x км/ч. Тогда первую половину пути второй автомобиль проходил $\dfrac{\frac{1}{2}S}{63}$ часов, а вторую $\dfrac{\frac{1}{2}S}{x+22}$ часов. Тогда средняя скорость второго автомобиля равна $\dfrac{S}{\dfrac{\frac{1}{2}S}{63}+\dfrac{\frac{1}{2}S}{x+22}}$ км/ч, что совпадает со скоростью первого автомобиля:

$$\frac{S}{\dfrac{\frac{1}{2}S}{63}+\dfrac{\frac{1}{2}S}{x+22}}=x$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{2\cdot 63}+\dfrac{1}{2(x+22)}}=x$$

$$\frac{1}{\dfrac{x+22+63}{2\cdot 63(x+22)}}=x$$

$$\frac{2\cdot 63(x+22)}{x+85}=x \quad \Big| \cdot (x+85)$$

$$126x+126\cdot 22=x^2+85x$$

$$x^2-41x-2772=0.$$

$$D=41^2+4\cdot 2772=1681+11088=12769=113^2,$$

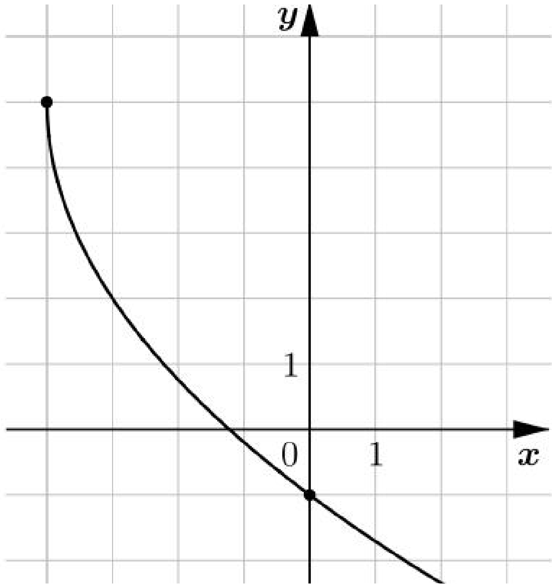
$$x_{1,2}=\frac{41\pm 113}{2}=-36;77.$$

Поскольку $x>0$, подходит только $x=77$.

10. На рисунке изображён график функции вида

$$f(x) = a\sqrt{x - x_0} + y_0,$$

где числа a, x_0 и y_0 — действительные. Найдите значение $f(12)$.



Решение: График функции $f(x) = a\sqrt{x - x_0} + y_0$ получается сдвигом графика функции $g(x) = a\sqrt{x}$ на x_0 вдоль оси Ox и на y_0 вдоль оси Oy. Следовательно, вершина такого видоизмененного графика имеет координаты $(x_0; y_0)$.

По картинке несложно видеть, что вершина графика имеет координаты $(-4; 5)$, значит, функция имеет вид

$$f(x) = a\sqrt{x - (-4)} + 5 = a\sqrt{x + 4} + 5$$

Также по картинке видно, что в точке $x = 0$ функция равна -1. Это условие можно записать следующим образом:

$$a\sqrt{0 + 4} + 5 = f(0) = -1 \Leftrightarrow 2a + 5 = -1 \Leftrightarrow a = -3$$

Теперь мы полностью восстановили функцию, она имеет вид

$$f(x) = -3\sqrt{x + 4} + 5$$

Тогда искомое значение равно

$$f(12) = -3\sqrt{12 + 4} + 5 = -3 \cdot 4 + 5 = -12 + 5 = -7.$$

11. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 13 + 75x - x^3$$

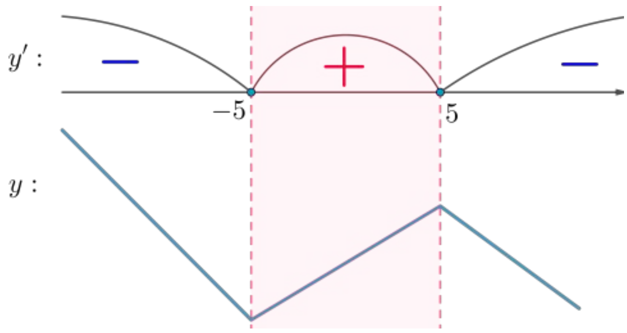
на отрезке $[-5; 5]$.

Решение: Для того, чтобы найти наименьшее значение функции на отрезке, нужно схематично изобразить график функции на этом отрезке.

1. Найдем производную:
$$y' = 75 - 3x^2$$

2. Найдем нули производной:
$$75 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 5$$

3. Найдем знаки производной на получившихся промежутках и изобразим схематично график функции:



Таким образом, мы видим, что на отрезке $[-5; 5]$ функция y возрастает, следовательно, наименьшее значение на этом отрезке она принимает в точке $x = -5$. Тогда
$$y(-5) = 13 - 5 \cdot 75 + 5^3 = -237$$

12. а) Решите уравнение $\cos x = \sqrt{3}\sin x - 1$.

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение: а) Перепишем уравнение в виде:
$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = -1$$

Разделим левую и правую части уравнения на $\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$:
$$\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = -\frac{1}{2}$$

Заметим, что можно принять $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3}$, а $\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$. Тогда уравнение примет вид:
$$\cos x \cos\frac{\pi}{3} - \sin x \sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

По формуле $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha + \beta)$ имеем:
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x_2 = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x_2 = -\pi + 2\pi k,\ k, n \in \mathbb{Z}$$

б) Проведем отбор с помощью двойного неравенства для каждой серии решений:

$$-3\pi \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant -\frac{3\pi}{2} \quad \Big| - \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{10}{3}\pi \leqslant 2\pi n \leqslant -\frac{11\pi}{6} \quad \Big| : 2\pi$$

$$-\frac{5}{3} \leqslant n \leqslant -\frac{11}{12}$$

$$n = -1: \quad x = -\frac{5\pi}{3}.$$

$$-3\pi \leqslant -\pi + 2\pi k \leqslant -\frac{3\pi}{2} \quad \Big| + \pi$$

$$-2\pi \leqslant 2\pi k \leqslant -\frac{\pi}{2} \quad \Big| : 2\pi$$

$$-1 \leqslant k \leqslant -\frac{1}{2}$$

$$k = -1: \quad x = -3\pi.$$

Итого, в данном отрезке находятся корни $x = -3\pi$ и $x = -\dfrac{5\pi}{3}$.

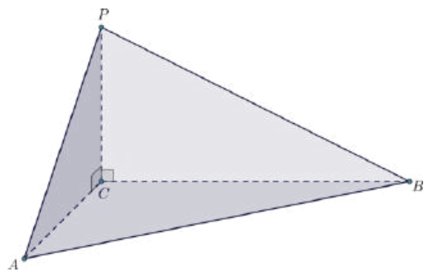
13. Дана треугольная пирамида $PABC$, причем высота пирамиды, опущенная из точки P, падает в точку C. Известно, что PA перпендикулярно BC.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды $PABC$, если известно, что $PB = 15$, $AB = 13$, $\cos\angle PBA = \dfrac{48}{65}$.

Решение:

а) Из условия следует, что PC – высота пирамиды. Следовательно, $PC \perp CA$ и $PC \perp CB$. По теореме о трех перпендикулярах так как наклонная PA перпендикулярна прямой BC, то и ее проекция CA перпендикулярна прямой BC. Следовательно, $\angle ACB = 90°$, то есть $\triangle ABC$ прямоугольный.



б) По теореме косинусов из $\triangle PAB$:

$$PA^2 = 15^2 + 13^2 - 2 \cdot 15 \cdot 13 \cdot \frac{48}{65} = 106$$

Обозначим $PC = h$, $CA = y$, $CB = x$. Тогда, применяя три раза теорему Пифагора, получим равенства:

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 15^2 \\ x^2 + y^2 = 13^2 \\ y^2 + h^2 = 106 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 5 \\ h = 9 \end{cases}$$

Следовательно, объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot PC = 90$$

14. Решите неравенство

$$3 \cdot 121^x - 4 \cdot 11^x \geqslant -1.$$

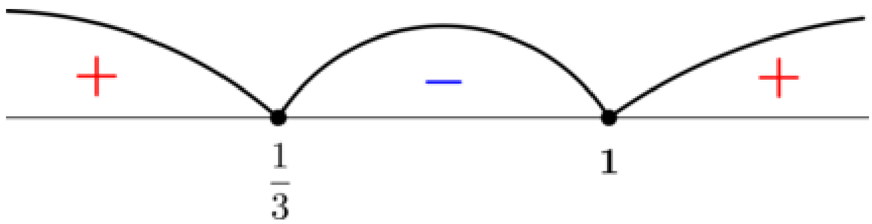
Решение: Исходное неравенство равносильно неравенству

$$3 \cdot (11^x)^2 - 4 \cdot 11^x + 1 \geqslant 0$$

Сделаем замену $11^x = y$, тогда полученное неравенство примет вид

$$3y^2 - 4y + 1 \geqslant 0$$

Таким образом, по методу интервалов:



Откуда

$$\left[\begin{array}{l} y \leqslant \frac{1}{3} \\ y \geqslant 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11^x \leqslant \frac{1}{3} \\ 11^x \geqslant 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11^x \leqslant 11^{\log_{11} \frac{1}{3}} \\ 11^x \geqslant 11^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant \log_{11} \frac{1}{3} \\ x \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Таким образом,

$$x \in \left(-\infty; \log_{11} \frac{1}{3}\right] \cup [0; +\infty)$$

15. Павлу банком был предложен кредит на следующих условиях:

— сумма кредита не должна превышать 150 000 рублей;

— раз в месяц банк начисляет на остаток долга 22%;

— после начисления процентов Павел вносит в банк некоторый платеж, причем весь кредит должен быть выплачен тремя платежами так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно.

Помогите посчитать Павлу, сколько процентов от первоначального долга составит переплата по данному кредиту?

Решение: Т.к. долг должен уменьшаться равномерно, то схема выплаты кредита — дифференцированные платежи. Т.к. платежей должно быть 3, значит, кредит дается на 3 месяца, следовательно, долг каждый месяц должен уменьшаться на $\dfrac{1}{3}$ часть. Составим таблицу, обозначив за A — сумму кредита:

Месяц	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Сумма платежа	Долг после платежа
1	A	$A + 0,22 \cdot A$	$0,22 \cdot A + \frac{1}{3} \cdot A$	$\frac{2}{3} \cdot A$
2	$\frac{2}{3} \cdot A$	$\frac{2}{3} \cdot A + 0,22 \cdot \frac{2}{3} \cdot A$	$0,22 \cdot \frac{2}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot A$	$\frac{1}{3} \cdot A$
3	$\frac{1}{3} \cdot A$	$\frac{1}{3} \cdot A + 0,22 \cdot \frac{1}{3} \cdot A$	$0,22 \cdot \frac{1}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot A$	0

Таким образом, переплата по кредиту составит:

$$\left(0,22 \cdot A + \frac{1}{3} \cdot A + 0,22 \cdot \frac{2}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot A + 0,22 \cdot \frac{1}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot A\right) - A =$$

$$= 0,22 \cdot A \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = 0,44A$$

Следовательно, процент, который составит переплата относительно первоначального долга, равен

$$\frac{0,44A}{A} \cdot 100\% = 44\%$$

Заметим, что информация о том, что сумма кредита не должна превышать 150 000 рублей, на самом деле не нужна для того, чтобы ответить на вопрос задачи.

16. Диагональ AC разбивает трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, из которых AD большее, на два подобных треугольника.

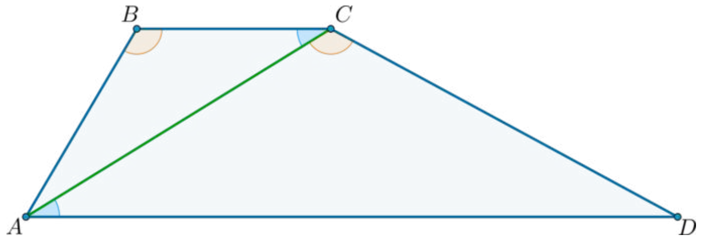
а) Докажите, что $\angle ABC = \angle ACD$.

б) Найдите отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, если известно, что $BC = 18$, $AD = 50$, $\cos\angle CAD = \frac{3}{5}$.

Решение: а) Углы $\angle CAD$ и $\angle BCA$ равны как накрест лежащие. Следовательно, т.к. $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, то $\angle ABC$ равен либо $\angle ACD$, либо $\angle ADC$.

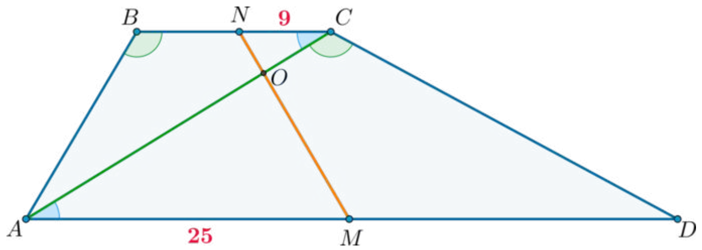
Пусть $\angle ABC = \angle ADC$, тогда $\angle BAC = \angle ACD$ — накрест лежащие углы при AB и CD и секущей AC. То есть $AB \parallel CD$, что невозможно, т.к. тогда $ABCD$ – параллелограмм, а не трапеция.

Следовательно, $\angle ABC = \angle ACD$, ч.т.д.



б) Используем условие того, что $\triangle ABC \sim \triangle ACD$:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad AC^2 = AD \cdot BC \quad \Rightarrow \quad AC = 30$$



Заметим, что $\triangle AOM \sim \triangle CON$ с коэффициентом $\frac{25}{9}$. Значит, если обозначить OC за k, то $AO = \frac{25}{9}k$. Следовательно,

$$AO + OC = \frac{34}{9}k = 30 \quad \Rightarrow \quad k = OC = \frac{9 \cdot 15}{17}.$$

Найдем по теореме косинусов (из условия $\cos\angle OCN = \cos\angle CAD = \frac{3}{5}$) из $\triangle CON$

$$ON^2 = 9^2 + \left(\frac{9 \cdot 15}{17}\right)^2 - 2 \cdot 9 \cdot \frac{9 \cdot 15}{17} \cdot \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad ON = \frac{9 \cdot 4}{17} \cdot \sqrt{13}.$$

Значит, вследствие подобия

$$OM = \frac{25}{9} \cdot ON = \frac{25 \cdot 4}{17} \cdot \sqrt{13}.$$

Таким образом,

$$MN = ON + OM = 8\sqrt{13}.$$

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a-3)x^2 - 2ax + 5a = 0$$

имеет решения, и все решения этого уравнения положительны.

Решение: Сразу возникает два случая: $a - 3 = 0$ и уравнение вырождается в линейное, либо уравнение квадратное.

1. $a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$

   Получаем

$$-6x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} > 0$$

   При таком a корень существует и положителен.

2. $a-3\neq 0 \Rightarrow a\neq 3$

Далее возможны два случая.

(a) Уравнение имеет ровно один корень, т.е. $D=0$. Найдем a, при которых $D=0$:

$$D=4a^2-20a(a-3)=-16a^2+60a=0 \Leftrightarrow a=0;\frac{15}{4}$$

При $a=0$ получаем уравнение $-3x^2=0 \Leftrightarrow x=0$, корень неположителен.

При $a=\frac{15}{4}$ корень положителен:

$$x=\frac{2a}{2(a-3)}=\frac{\frac{15}{4}}{\frac{15}{4}-3}=\frac{15}{15-12}=5>0$$

(b) Уравнение имеет ровно два корня, т.е. $D>0$. Найдем a, при которых $D>0$:

$$D=-16a^2+60a>0 \Leftrightarrow a\in\left(0;\frac{15}{4}\right)$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{2a}{a-3} \\ x_1x_2=\frac{5a}{a-3} \end{cases}$$

Заметим, что два числа положительны $\Leftrightarrow$ их сумма и произведение положительны, т.е. должна выполняться система

$$\begin{cases} \frac{2a}{a-3}>0 \\ \frac{5a}{a-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$$

Пересекая с промежутком $\left(0;\frac{15}{4}\right)$, получаем $a\in\left(3;\frac{15}{4}\right)$.

Объединив все подходящие a, получаем

$$a\in\left[3;\frac{15}{4}\right].$$

18. С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.

а) Может ли в результате такой операции получиться число 201?

б) Может ли в результате такой операции получиться число 251?

в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 600 до 999 включительно?

Решение:

а) Сумма цифр числа 610 равна 7. Следовательно, в результате операции из этого числа получится

$$\frac{610-7}{3}=\frac{603}{3}=201$$

Ответ: да, может.

б) Пусть число равно $100a+10b+c$, где a, b и c — цифры и $a \neq 0$. Тогда сумма цифр такого числа равна $a+b+c$, а в результате операции из него получится число

$$\frac{(100a+10b+c)-(a+b+c)}{3}=33a+3b$$

Получившееся число делится на 3. Следовательно, число 251 не могло получиться, так как оно на 3 не делится.

Ответ: нет, не может.

в) Заметим, что получившееся число не зависит от последней цифры исходного числа, поэтому достаточно найти количество различных чисел, получающихся из чисел, делящихся на 10. Рассмотрим числа

$$100a+10b \quad \text{и} \quad 100x+10y$$

где a, b, x и y — цифры и $a \neq 0$, $x \neq 0$. В результате операции из них получатся числа

$$33a+3b \quad \text{и} \quad 33x+3y$$

соответственно. Разность этих чисел равна

$$33(a-x)+3(b-y)$$

Если $a \neq x$, то эта разность не может быть равной нулю, поскольку $|3(b-y)| \leqslant 27$.

Если $a=x$, то разность может быть равной нулю только при $b=y$, то есть если исходные числа совпадают.

Значит, в результате операции из различных трёхзначных чисел, делящихся на 10, получаются различные числа.

Среди чисел от 600 до 999 ровно 40 чисел делятся на 10. Следовательно, в результате операции из чисел от 600 до 999 может получиться 40 различных чисел.