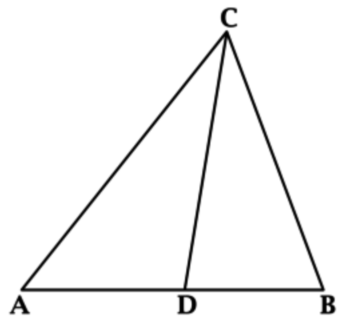
Открытый Пробный ЕГЭ №3

1. В треугольнике ABC: CD – биссектриса, $\angle B = 63°$, $\angle ACD = 33°$. Найдите $\angle ADC$. Ответ дайте в градусах.



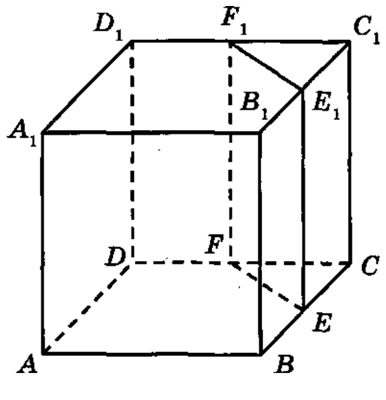
Решение.

Так как CD – биссектриса, то $\angle ACD = \angle DCB$, тогда $\angle ACB = 2 \cdot 33° = 66°$. Сумма углов треугольника равна $180°$, тогда $\angle A = 180° - \angle B - \angle ACB = 180° - 63° - 66° = 51°$.

$\angle A + \angle ACD + \angle ADC = 180°$, тогда $51° + 33° + \angle ADC = 180°$, откуда находим $\angle ADC = 96°$.

Ответ: 96

2. Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 11. Найдите объём куба.



Решение.

Пусть a — длина ребра куба. Поскольку основанием призмы служит прямоугольный треугольник, катеты которого составляют половину от a, объём призмы равен:

$$V = Sh = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \cdot a = \frac{1}{8}a^3$$

что в 8 раз меньше объёма куба a^3. Тогда объём куба равен $11 \cdot 8 = 88$.

Ответ: 88

3. Из множества натуральных чисел от 43 до 67 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

Решение.

Будем использовать общепринятое обозначение $[a]$ — целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превышающее a.

Среди чисел от 1 до 67 ровно:

$$\left[\frac{67}{3}\right] = 22$$

числа делятся на 3.

Среди чисел от 1 до 42 ровно:

$$\left[\frac{42}{3}\right] = 14$$

чисел делятся на 3.

Получаем, что среди $67 - 42 = 25$ чисел от 43 до 67 на 3 делятся $22 - 14 = 8$ чисел.

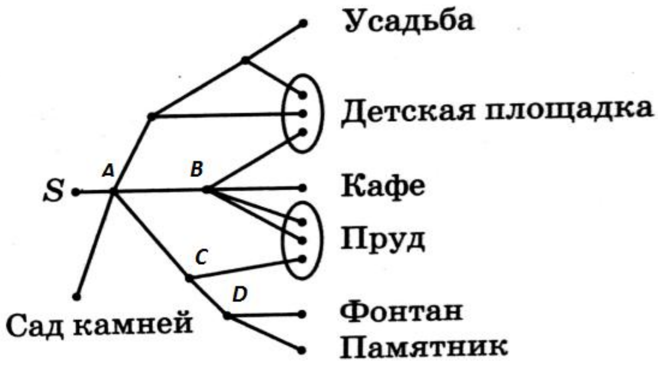
Тогда искомая вероятность равна:

$$p = \frac{8}{25} = 0,32$$

Ответ: $0,32$

4.

Артем гуляет по парку. Он выходит из точки S и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом он выйдет к пруду или фонтану.



Решение.

Первый перекресток на пути из точки S — точка A. По условию варианты выбора направления на перекрестках равновероятны. В точке A есть 4 варианта, куда пойти, каждому варианту соответствует вероятность $\frac{1}{4}$.

Тогда вероятность оказаться в точке B равна $\frac{1}{4}$. Из точки B также ведут 4 пути, причем 2 из них ведут к пруду, а остальные ведут к кафе или к детской площадке. Итого, из точки B невозможно попасть к фонтану, а вероятность попасть к пруду равна $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Получаем, что вероятность попасть в одну из двух верхних точек пруда равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Вероятность попасть в точку C из точки A равна $\frac{1}{4}$. Далее с вероятностью $\frac{1}{2}$ Артем попадает к пруду, то есть вероятность попасть в нижнюю точку пруда равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Вероятность попасть из точки C в точку D равна $\frac{1}{2}$, а затем из точки D с вероятностью $\frac{1}{2}$ Артем попадет к фонтану. Итого, к фонтану он попадет с вероятностью $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

Суммируя, получаем вероятность попасть в одну из точек пруда либо к фонтану:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0,3125.$$

Ответ: $0,3125$

5. Найдите корень уравнения

$$0,25 \cdot 6^{x+1} = 3^{x+1}$$

Решение.

ОДЗ: x — произвольное. Решим на ОДЗ:

Разделим левую и правую часть уравнения на 3^{x+1} :

$$0,25 \cdot 2^{x+1} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2^{x+1} = 2^2$$

Последнее уравнение имеет стандартный вид и равносильно $x+1 = 2$, что равносильно $x = 1$ – подходит по ОДЗ.

Ответ: 1

6. Найдите значение выражения

$$\log_{0,7} 20 - \log_{0,7} 14$$

Решение.

По свойствам логарифма имеем:

$$\log_{0,7} 20 - \log_{0,7} 14 = \log_{0,7} \frac{20}{14} = \log_{\frac{7}{10}} \frac{10}{7} = -1$$

Ответ: -1

7. Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Пусть $y_k = kx + b$ – уравнение касательной. Так как $y = 7x - 5$ параллельна y_k, то их угловые коэффициенты равны, следовательно, $k = 7$.

Так как угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ равен значению производной функции в точке касания x_0, то есть $7 = k = f'(x_0)$, а $f'(x) = 2x + 6$, то:

$$7 = 2x_0 + 6 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 0,5$$

Ответ: $0,5$

8. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 45$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 50 см до 70 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 200 см до 270 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}$$

На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Решение.

Подставим $f=45$ см в формулу линзы:

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{45} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1}=\frac{1}{45}-\frac{1}{d_2}$$

Так как мы ищем минимальное возможное значение d_1, ему будет соответствовать максимально возможное значение $\frac{1}{d_1}$, то есть максимально возможное значение $\frac{1}{45}-\frac{1}{d_2}$

Максимум такого выражения достигается при минимальном возможном $\frac{1}{d_2}$, то есть при максимально возможном $d_2=270$ см:

$$\frac{1}{d_1}=\frac{1}{45}-\frac{1}{d_2}=\frac{1}{45}-\frac{1}{270}=\frac{5}{270}=\frac{1}{54} \Leftrightarrow d_1=54$$

Значение $d_1=54$ см лежит в нужных пределах от 50 см до 70 см, то есть подходит.

Ответ: 54

9. Катер береговой охраны прошёл по течению реки Конго 120 км и вернулся обратно. Известно, что обратный путь занял на 1 час больше времени, а скорость катера в неподвижной воде равна 27 км/ч. Найдите скорость течения. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть v км/ч — скорость течения, $v>0$, тогда

$27+v$ — скорость перемещения катера по течению,

$27-v$ — скорость перемещения катера против течения,

$\dfrac{120}{27+v}$ — время, затраченное катером на перемещение по течению,

$\dfrac{120}{27-v}$ — время, затраченное катером на перемещение против течения.

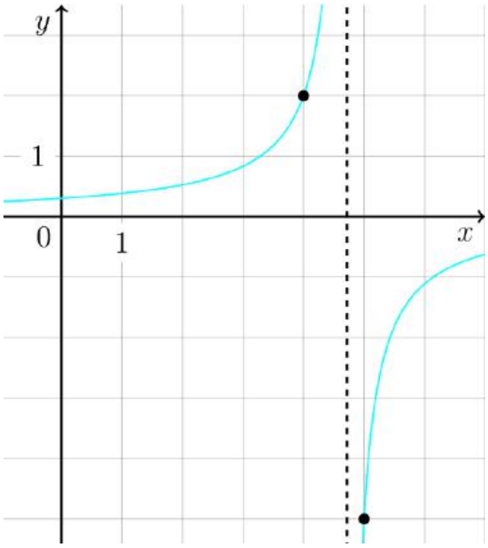
Так как время перемещения против течения на час больше, чем время по течению, то:

$$\frac{120}{27+v}+1=\frac{120}{27-v} \qquad \Leftrightarrow \qquad v^2+240v-729=0$$

— при $v\neq\pm27$, что равносильно $v_1=3, v_2=-243$, откуда получаем, что $v=3$ км/ч, так как $v>0$.

Ответ: 3

10. На рисунке изображён график вида $f=\dfrac{1}{ax+b}$. Найдите $f(-1)$



Решение.

Чтобы определить коэффициенты a и b, подставим точки $(4, 2)$ и $(5, -5)$ в уравнение, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4a+b} = 2 \\ \dfrac{1}{5a+b} = -5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} - 4a = b \\ -\dfrac{1}{5} = 5a + \dfrac{1}{2} - 4a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} - 4a = b \\ a = -0,7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = 3,3 \\ a = -0,7 \end{cases}$$

Получаем уравнение графика: $f = \dfrac{1}{-0,7x + 3,3}$

Получаем ответ: $f(-1) = \dfrac{1}{-0,7 \cdot (-1) + 3,3} = \dfrac{1}{4} = 0,25.$

Ответ: $0,25$

11. Найдите точку максимума функции $y = (2x-3)\cos x - 2\sin x + 2$, принадлежащую промежутку $(0; 2\pi)$.

Решение.

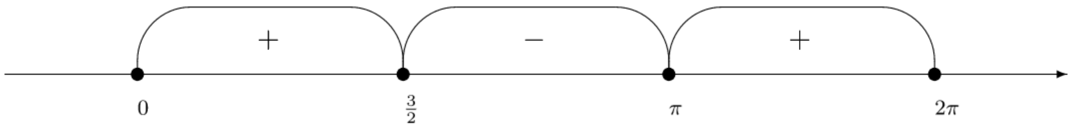
Функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$. Исследуем функцию и найдем ее промежутки возрастания и убывания, для этого найдем ее производную:

$$y' = (2x-3)'\cos x + (2x-3)\cdot(\cos x)' - 2(\sin x)' = 2\cos x - (2x-3)\sin x - 2\cos x = -(2x-3)\sin x$$

Найдем нули производной:

$$y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 0 \\ \sin x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Нули производной и точки, в которых она не существует, разбивают область определения производной на промежутки, на каждом из которых она непрерывна и принимает значения одного знака. Найдем знаки производной на каждом из таких промежутков, учитывая, что на промежуток $(0; 2\pi)$ попадают нули производной $x = \frac{3}{2}; \pi$:2



Следовательно, $x = \frac{3}{2}$ является точкой максимума на указанном промежутке.

Ответ: $1,5$

12.

а) Решите уравнение

$$4 - 3\sqrt{2}\sin\frac{x}{4} = 2\cos^2(0,25x);$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие промежутку $(0; 4\pi)$.

Решение.

а) Заметим, что $0,25x = \dfrac{1}{4}x$, следовательно:

$$4 - 3\sqrt{2}\sin\frac{x}{4} - 2\left(1 - \sin^2\frac{x}{4}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sin^2\frac{x}{4} - 3\sqrt{2}\sin\frac{x}{4} + 2 = 0$$

Сделаем замену $\sin\dfrac{x}{4} = t,\ -1 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда уравнение примет вид:

$$2t^2 - 3\sqrt{2}t + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ t_2 = \sqrt{2}$$

Заметим, что t_2 не удовлетворяет условию $-1 \leqslant t \leqslant 1$, то есть не является решением. Сделаем обратную замену:

$$\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} &\frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ &\frac{x}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x_1 = \pi + 8\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ &x_2 = 3\pi + 8\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

б) Отберем корни:

$0 < x_1 < 4\pi \quad \Rightarrow \quad n = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi$

$0 < x_2 < 4\pi \quad \Rightarrow \quad m = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3\pi$

Ответ: а) $\pi + 8\pi n, 3\pi + 8\pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$; б) $\pi; 3\pi$.

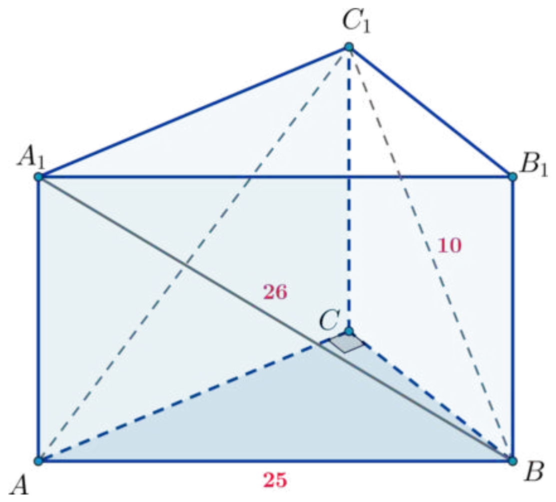
13. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC, причем $\angle C = 90^\circ$. Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны соответственно 26 и 10, $AB = 25$.

а) Докажите, что $\triangle BA_1C_1$ — прямоугольный;

б) Найдите объем пирамиды AA_1C_1B.

Решение.

а) Так как $BB_1 \perp (A_1B_1C_1)$, $B_1C_1 \perp A_1C_1$, то по теореме о трех перпендикулярах $BC_1 \perp A_1C_1$ (как наклонная). Следовательно, $\triangle A_1C_1B$ – прямоугольный.



б) Заметим, что $BC \perp AC$ и $BC \perp CC_1$, следовательно, по признаку $BC \perp (AA_1C_1)$. Следовательно, BC – высота пирамиды BAA_1C_1 с основанием AA_1C_1.
Так как $\triangle AA_1C_1$ прямоугольный, то

$$V_{BAA_1C_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AA_1 \cdot A_1C_1 \cdot BC}{3}$$

По теореме Пифагора

$$A_1C_1 = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{16 \cdot 36} = 24$$

$$AA_1 = \sqrt{26^2 - 25^2} = \sqrt{1 \cdot 51} = \sqrt{51}$$

$$BC = \sqrt{10^2 - 51} = \sqrt{49} = 7$$

Тогда

$$V_{BAA_1C_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \sqrt{51} \cdot 7}{3} = 28\sqrt{51}$$

Ответ: б) $28\sqrt{51}$.

14. *(ЕГЭ 2020)* Решите неравенство

$$x^2 \log_{625}(3-x) \leqslant \log_5(x^2 - 6x + 9)$$

Решение.

Найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ x^2 - 6x + 9 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < 3 \\ (x-3)^2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x < 3$$

Преобразуем исходное неравенство:

$$x^2 \log_{625}(3-x) \leqslant \log_5(x^2 - 6x + 9) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{4} \log_5(3-x) \leqslant \log_5((x-3)^2) \quad \Leftrightarrow$$

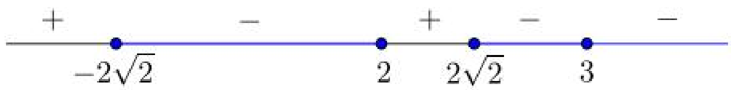
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{4} \log_5(3-x) - 2\log_5(|x-3|) \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \log_5(3-x)\left(\frac{x^2}{4} - 2\right) \leqslant 0$$

Значит, имеем систему:

$$\begin{cases} \log_5(3-x)\left(\frac{x^2}{4}-2\right) \leqslant 0 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (5-1)(3-x-1)(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2}) \leqslant 0 \\ x<3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (2-x)(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2}) \\ x<3 \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы методом интервалов:



Получим $x \in [-2\sqrt{2}; 2] \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$. Пересекая со вторым неравенством системы, получаем итоговый ответ (заметим, что $2\sqrt{2} < 3$, т.к. $8 < 9$)

$$x \in [-2\sqrt{2}; 2] \cup [2\sqrt{2}; 3)$$

Ответ: $[-2\sqrt{2}; 2] \cup [2\sqrt{2}; 3)$.

15. *(ЕГЭ 2021, основная волна)* В июле 2025 года планируется взять кредит на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 13% по сравнению с концом предыдущего года;

— в январе 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг возрастает на 12% по сравнению с концом предыдущего года;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равна сумма всех выплат?

Решение.

Кредит взят на 10 лет, обозначим размер кредита через $S = 600\,000$ рублей, платеж дифференцированный, значит, каждый раз за год сумма долга должна уменьшаться на $\frac{S}{10}$. Составим таблицу, учитывая, что первые пять раз сумма долга увеличивается на 13%, а последние пять — на 12%. Значение в ячейке столбца «Выплата» в задачах на дифференцированный платеж можно вычислить двумя способами:

- как разность значений в ячейках «Сумма долга после начисления %» и «Сумма долга после выплаты»;
- как разность дифференцированного платежа (в данной задаче это $\frac{1}{10}S$) + процент от суммы долга на соответствующий месяц (в данной задаче это $\sigma \cdot \frac{13}{100}$, либо $\sigma \cdot \frac{12}{100}$, где σ — значение в столбце «Сумма долга до начисления %»).

Год	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
2026	S	$S+\frac{13}{100}S$	$\frac{9}{10}S$	$\frac{13}{100}S+\frac{1}{10}S$
2027	$\frac{9}{10}S$	$\frac{9}{10}S+\frac{13}{100}\cdot\frac{9}{10}S$	$\frac{8}{10}S$	$\frac{13}{100}\cdot\frac{9}{10}S+\frac{1}{10}S$
2028	$\frac{8}{10}S$	$\frac{8}{10}S+\frac{13}{100}\cdot\frac{8}{10}S$	$\frac{7}{10}S$	$\frac{13}{100}\cdot\frac{8}{10}S+\frac{1}{10}S$
2029	$\frac{7}{10}S$	$\frac{7}{10}S+\frac{13}{100}\cdot\frac{7}{10}S$	$\frac{6}{10}S$	$\frac{13}{100}\cdot\frac{7}{10}S+\frac{1}{10}S$
2030	$\frac{6}{10}S$	$\frac{6}{10}S+\frac{13}{100}\cdot\frac{6}{10}S$	$\frac{5}{10}S$	$\frac{13}{100}\cdot\frac{6}{10}S+\frac{1}{10}S$
2031	$\frac{5}{10}S$	$\frac{5}{10}S+\frac{12}{100}\cdot\frac{5}{10}S$	$\frac{4}{10}S$	$\frac{12}{100}\cdot\frac{5}{10}S+\frac{1}{10}S$
2032	$\frac{4}{10}S$	$\frac{4}{10}S+\frac{12}{100}\cdot\frac{4}{10}S$	$\frac{3}{10}S$	$\frac{12}{100}\cdot\frac{4}{10}S+\frac{1}{10}S$
2033	$\frac{3}{10}S$	$\frac{3}{10}S+\frac{12}{100}\cdot\frac{3}{10}S$	$\frac{2}{10}S$	$\frac{12}{100}\cdot\frac{3}{10}S+\frac{1}{10}S$
2034	$\frac{2}{10}S$	$\frac{2}{10}S+\frac{12}{100}\cdot\frac{2}{10}S$	$\frac{1}{10}S$	$\frac{12}{100}\cdot\frac{2}{10}S+\frac{1}{10}S$
2035	$\frac{1}{10}S$	$\frac{1}{10}S+\frac{12}{100}\cdot\frac{1}{10}S$	0	$\frac{12}{100}\cdot\frac{1}{10}S+\frac{1}{10}S$

Найдем сумму выплат (сумма по столбцу «Выплата»), подставив $S = 600\,000$.

$$S+\frac{13}{100}\left(S+\frac{9}{10}S+\frac{8}{10}S+\frac{7}{10}S+\frac{6}{10}S\right)+\frac{12}{100}\left(\frac{5}{10}S+\frac{4}{10}S+\frac{3}{10}S+\frac{2}{10}S+\frac{1}{10}S\right)=$$
$$=S+\frac{13}{100}\cdot\frac{10+9+8+7+6}{10}S+\frac{12}{100}\cdot\frac{5+4+3+2+1}{10}S=\frac{1000+13\cdot 40+12\cdot 15}{1000}\cdot 600000=$$
$$=1020000$$

Таким образом, сумма выплат равна 1020 тыс. рублей.

Ответ: 1020 тысяч.

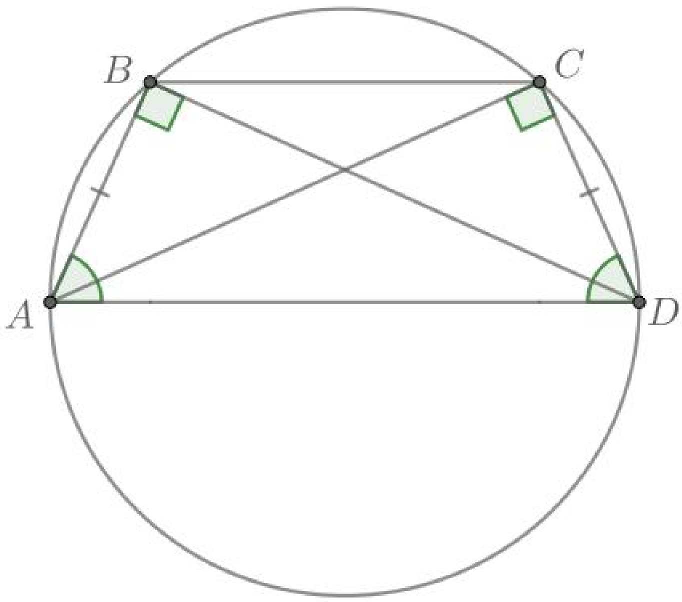
16. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.

а) Докажите, что $AB = CD$.

б) Найдите AD, если $AB = 2$, $BC = 7$.

Решение.

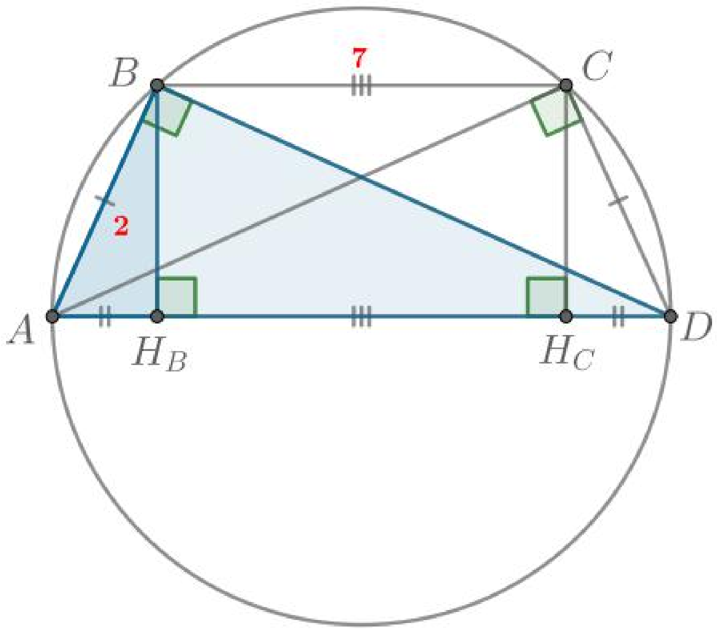
а) По условию углы, опирающиеся на сторону AD, равны, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$. Тогда четырёхугольник $ABCD$ является вписанным. Мы получили, что $ABCD$ — трапеция, вписанная в окружность, значит, она равнобедренная, то есть $AB = CD$.



б) Пусть H_B — основание высоты, опущенной из точки B на прямую AD. Тогда BH_B — высота трапеции $ABCD$. Аналогично CH_C — другая высота трапеции $ABCD$. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABH_B и DCH_C. Они равны по гипотенузе $AB = CD$ и острому углу $\angle BAD = \angle CDA$, так как $ABCD$ — равнобедренная трапеция. В равных треугольниках соответственные элементы равны, поэтому $AH_B = DH_C$.

Также заметим, что H_BBCH_C — прямоугольник, значит, $BC = H_BH_C$. Тогда

$$AD = AH_B + H_BH_C + H_CD = 2AH_B + BC$$



Теперь рассмотрим прямоугольные треугольники ABH_B и ADB. Они подобны по общему углу BAD. Тогда

$$\frac{AH_B}{AB} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AB^2 = AH_B \cdot (2AH_B + BC) \Rightarrow 2AH_B^2 + 7AH_B - 4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} AH_B = 0,5 \\ AH_B = -4 \end{array}\right.$$

Длина отрезка больше 0, поэтому $AH_B = 0,5$, а

$$AD = 2AH_B + BC = 2 \cdot 0,5 + 7 = 8$$

Ответ: б) 8.

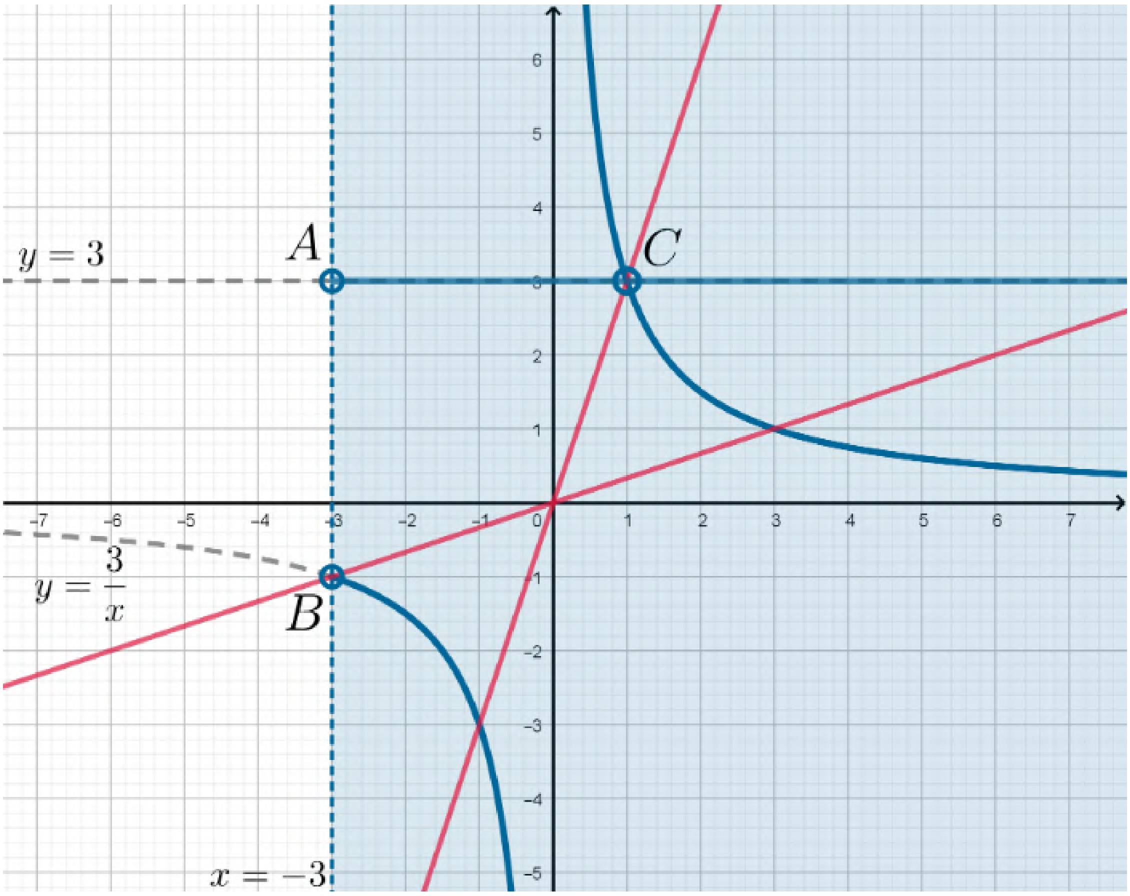
17. *(ЕГЭ 2022, досрочная волна)* Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет три решения.

Решение.

Запишем систему, равносильную данной: $\begin{cases} (y-3)(xy-3) = 0 \\ x + 3 > 0 \\ y = ax \end{cases}$



Графиком первого уравнения является объединение двух графиков: горизонтальной прямой $y = 3$ и гиперболы $y = \frac{3}{x}$ (заметим, что в уравнении $xy = 3$ можно разделить обе части на x, так как $x = 0$ не является решением этого уравнения). Графиком второго уравнения при каждом фиксированном a является прямая, проходящая через начало координат $(0;0)$ (прямая может быть любой, кроме вертикальной, так как вертикальная прямая задается уравнением $x = \text{const}$). Неравенство задает область $x > -3$, соответствующую правой полуплоскости, образованной прямой $x = -3$, не включая границу.

Следовательно, нам необходимо найти такие положения прямой $l:\ y = ax$, при которых она имеет ровно три точки пересечения с графиком первого уравнения в области $x > -3$.

При всех $a \leqslant 0$ прямая l расположена во второй и четвертой четвертях, следовательно, с графиком первого уравнения имеет не более одной точки пересечения.

При $a > 0$:

- между горизонтальным положением $(a = 0)$ и положением, когда l проходит через точку B, включая это положение, имеется две точки пересечения;
- между положением, когда прямая l проходит через точку B, и положением, когда она проходит через точку C (не включая это положение), имеется три точки пересечения;
- в положении, когда прямая l проходит через точку C — две точки пересечения;
- между положением когда, прямая l проходит через точку C, и вертикальным положением имеется три точки пересечения.

Найдем значения параметра, при которых прямая l проходит через точки B, C. Точка B – точка пересечения гиперболы с прямой $x = -3$, следовательно, $y = \frac{3}{-3} = -1$, значит, $B(-3; -1)$. Точка C — точка пересечения прямой $y = 3$ и гиперболы, следовательно, $3 = \frac{3}{x}$, откуда $x = 1$, следовательно, $C(1; 3)$. Значит:

$$\begin{aligned} B:\ -1 = -3a \quad &\to \quad a = \frac{1}{3} \\ C:\ 3 = 1 \cdot a \quad &\to \quad a = 3 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a \in \left(\frac{1}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$$

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

18. *(ЕГЭ 2021, основная волна)* Отношение трехзначного натурального числа к сумме его цифр — целое число.

а) Может ли это отношение быть равным 11?

б) Может ли это отношение быть равным 5?

в) Какое наибольшее значение может принимать это отношение, если число не делится на 100 и его первая цифра равна 7?

Решение.

а) a, b и c должны удовлетворять следующему условию

$$\frac{\overline{abc}}{a + b + c} = 11 \ \Leftrightarrow\ 100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c \ \Leftrightarrow\ 89a - b - 10c = 0$$

Осталось подобрать какие-нибудь цифры a, b и c, которые удовлетворяют равенству. Для простоты возьмем $a = 1$, тогда подойдут $b = 9,\ c = 8$, что даст нам исходное число 198. И действительно, $198/(1 + 9 + 8) = 11$.

б) Используем подход, аналогичный первому пункту. Цифры a, b и c должны удовлетворять следующему условию

$$\frac{\overline{abc}}{a+b+c} = 5 \;\Leftrightarrow\; 100a + 10b + c = 5a + 5b + 5c \;\Leftrightarrow\; 95a + 5b - 4c = 0$$

Посмотрим на полученное равенство. Число $\overline{abc}$ трехзначное, значит, $a \geqslant 1$, следовательно, слагаемое $95a \geqslant 95$. Слагаемое $5b$ неотрицательно. Слагаемое $-4c \geqslant -4\cdot 9 = -36$. Тогда сумма трех слагаемых не меньше, чем $95 + 0 - 36 = 59$, и не может быть равна нулю ни при каких цифрах a, b и c.

в) Нам нужно максимизировать отношение

$$\frac{\overline{7bc}}{7+b+c}$$

при условии, что b и c не могут быть одновременно равны нулю (в этом и только в этом случае число будет делиться на 100).

Зафиксируем некоторое b, покажем, что при фиксированном b чем больше c, тем меньше будет отношение. Проверим это $(c_1 \leqslant c_2)$

$$\frac{\overline{7b0}}{7+b+0} \overset{?}{\geqslant} \frac{\overline{7bc}}{7+b+c} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{7b0}\cdot(7+b) + \overline{7b0}\cdot c \overset{?}{\geqslant} \overline{7b0}\cdot(7+b) + c\cdot(7+b) \quad\Leftrightarrow\quad \overline{7b0}\cdot c \overset{?}{\geqslant}$$

$$\frac{\overline{7bc_1}}{7+b+c_1} \overset{?}{\geqslant} \frac{\overline{7bc_2}}{7+b+c_2} \;\Leftrightarrow\; (\overline{7b0} + c_1)\cdot(7+b+c_2) \overset{?}{\geqslant} (\overline{7b0} + c_2)\cdot(7+b+c_1) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \overline{7b0}\cdot c_2 + (7+b)\cdot c_1 \overset{?}{\geqslant} \overline{7b0}\cdot c_1 + (7+b)\cdot c_2 \;\Leftrightarrow\; \overline{7b0}(c_2 - c_1) + (7+b)(c_1 - c_2) \overset{?}{\geqslant} 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (c_2 - c_1)(\overline{7b0} - b - 7) \overset{?}{\geqslant} 0$$

Последнее неравенство верно, т.к. $\overline{7b0} > 7 + b$ и $c_1 \leqslant c_2$. Переходы были равносильные (при условии, что b и c — цифры), следовательно, выполняется и исходное неравенство.

Мы поняли, что при фиксированном b максимум отношения достигается при наименьшем возможном c. Для всех значений b, кроме 0, минимальным допустимым будет $c = 0$, для $b = 0$ минимальным допустимым будет $c = 1$ (т.к. b и c не могут быть по условию равны нулю одновременно). Найдем теперь b, при котором достигается максимум, перебором.

1. $b = 0,\ c = 1,\ \dfrac{701}{8} = 87\dfrac{5}{8}$

2. $b = 1,\ c = 0,\ \dfrac{710}{8} = 88\dfrac{6}{8}$

3. $b = 2,\ c = 0,\ \dfrac{720}{9} = 80$

4. $b = 3,\ c = 0,\ \dfrac{730}{10} = 73$

5. $b = 4,\ c = 0,\ \dfrac{740}{11} = 67\dfrac{3}{11}$

6. $b = 5,\ c = 0,\ \dfrac{750}{12} = 62\dfrac{1}{2}$

7. $b = 6,\ c = 0,\ \dfrac{760}{13} = 58\dfrac{6}{13}$

8. $b = 7,\ c = 0,\ \dfrac{770}{14} = 55$

9. $b = 8,\ c = 0,\ \dfrac{780}{15} = 52$

10. $b = 9,\ c = 0,\ \dfrac{790}{16} = 49\dfrac{6}{16}$

Наибольшее целое отношение равно 80 и достигается при $b = 2,\ c = 0$ в числе 720.

Ответ: **а)** да; **б)** нет; **в)** 80.