Авторский вариант №5 «ИзиЕГЭ по Профильной Математике»

Полный видеоразбор варианта можно посмотреть

здесь!

Ответы, решения и критерии оценивания

№1

Ответ: 10,5.

№2

Ответ: 36.

№3

Ответ: 0,32.

№4

Ответ: 0,2.

№5

Ответ: 0,0625.

№6

Ответ: 1.

№7

Ответ: 0.

№8

Ответ: 12.

№9

Ответ: 1,5.

№10

Ответ: 1.

№11

Ответ: 1.

№12

Ответ:

а) $1;\ \frac{3}{2}$.

б) 1.

№13

Ответ:

б) $x = \frac{4}{5}\sqrt{5}$.

№14

Ответ:

$x \in (-\infty; -2] \cup \left[1; \frac{4}{3}\right]$.

№15

Ответ:

За 4 года.

№16

Ответ:

б) $\frac{378 - 84\sqrt{3}}{23}$.

№17

Ответ:

$a = 4$.

№18

Ответ:

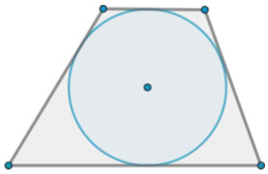
а) Могли.

б) Не могли.

в) 7.

№1

Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 9 и 12. Найдите среднюю линию трапеции.



Ответ

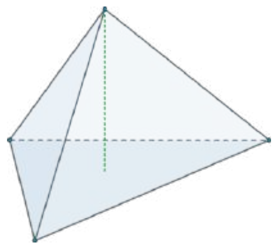
10,5

Решение

Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны. Следовательно, сумма оснований трапеции равна сумме боковых сторон, то есть равна $9 + 12 = 21$. Так как средняя линия трапеции равна полусумме оснований, то ответ: $21 : 2 = 10,5$.

№2

Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а высота равна $4\sqrt{3}$.



Ответ

36

Решение

В основании правильной пирамиды лежит правильный треугольник. Значит, площадь основания равна

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 9\sqrt{3}$$

Тогда объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 36$$

№3

Из множества натуральных чисел от 43 до 67 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

Ответ

0,32

Решение

Будем использовать общепринятое обозначение $[a]$ — целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превышающее a.

Среди чисел от 1 до 67 ровно $\left[\frac{67}{3}\right] = 22$ числа делятся на 3. Среди чисел от 1 до 42 ровно $\left[\frac{42}{3}\right] = 14$ чисел делятся на 3.

Получаем, что среди $67 - 42 = 25$ чисел от 43 до 67 на 3 делятся $22 - 14 = 8$ чисел.

Тогда искомая вероятность равна

$$p = \frac{8}{25} = 0,32$$

№4

При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпало 3 очка?

Ответ

0,2

Решение

Перечислим все события, которые могли произойти, с помощью пары чисел, показывающих число выпавших очков на первом и втором кубиках соответственно. Получим события

$$(1,5),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,2),\ (5,1)$$

Получим всего пять событий, среди которых только одно содержит число 3. По классическому определению вероятности события получим, что вероятность того, что хотя бы один раз выпало 3 очка, равна

$$p = \frac{1}{5} = 0,2$$

№5

Найдите наименьший положительный корень уравнения:

$$\cos(4\pi x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ответ

0,0625

Решение

Значение каждого из корней уменьшается при уменьшении k. При $k = 0$ получаем корни $\frac{1}{16}$ и $-\frac{1}{16}$, при меньших k оба корня уже будут отрицательны. Значит, наименьший положительный корень равен $\frac{1}{16} = 0,0625$.

№6

Найдите значение выражения:

$$\frac{1 - 2\cos^2 73^\circ}{2\sin^2 73^\circ - 1}$$

Ответ

1

Решение

По основному тригонометрическому тождесмтву имеем:

$$\frac{1 - 2\cos^2 73^\circ}{2\sin^2 73^\circ - 1} = \frac{\sin^2 73^\circ + \cos^2 73^\circ - 2\cos^2 73^\circ}{2\sin^2 73^\circ - \sin^2 73^\circ - \cos^2 73^\circ} = \frac{\sin^2 73^\circ - \cos^2 73^\circ}{\sin^2 73^\circ - \cos^2 73^\circ} = 1$$

№7

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^2 - 8t$, где x – расстояние от точки $x = 0$ в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость в момент времени $t = 2$ с. Ответ дайте в метрах в секунду.

Ответ

0

Решение

Скорость материальной точки, прямолинейно движущейся по закону $x(t)$, в момент времени t_0 равна $x'(t_0)$.
$x'(t) = 4t - 8$, тогда в момент $t = 2$ с:
$x'(2) = 4 \cdot 2 - 8 = 0$ м/с.

№8

К источнику с ЭДС $\varepsilon = 130$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R+r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 120 В? Ответ выразите в омах.

Ответ

12

Решение

Нам нужно найти такое минимальное значение R, при котором $U \geqslant 120$ В, то есть

$$U \geqslant 120 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varepsilon R}{R+r} \geqslant 120 \quad \Leftrightarrow \quad 130R \geqslant 120\,(R+1) \quad \Leftrightarrow \quad 10R \geqslant 120 \quad \Leftrightarrow \quad R \geqslant 12$$

Значит, при $R \geqslant 12$ Ом напряжение на нагрузке будет не менее 120 В, то есть ответ $R = 12$ Ом.

№9

Во сколько раз больше должен быть объём 5-процентного раствора кислоты, чем объём 10-процентного раствора той же кислоты, чтобы при смешивании получить 7-процентный раствор?

Ответ

1,5

Решение

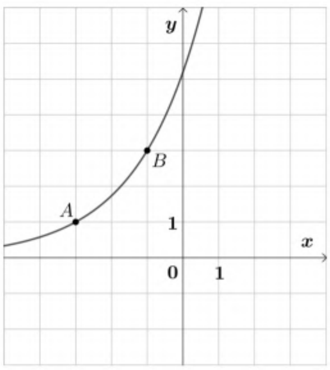
Пусть объём 5-процентного раствора кислоты равен x литров, а объём 10-процентного раствора равен y литров, тогда требуется найти значение величины $\dfrac{x}{y}$ при условии

$$0,05x + 0,1y = 0,07(x+y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x}{y} = \frac{3}{2} = 1,5\,,$$

таким образом, ответ: $1,5$.

№10

На рисунке изображен график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите,
при каком значении x значение функции равно 9.



Ответ

1

Решение

По картинке видим, что целые точки $A = (-3;1)$ и $B = (-1;3)$ принадлежат графику функции f. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} f(-3) = 1 \\ f(-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{-3+b} = 1 \\ a^{-1+b} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^b \cdot a^{-3} = 1 \\ a^b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^{-2} = 1 \\ a^b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 3 \end{cases}$$

Значит, функция имеет вид

$$f(x) = (\sqrt{3})^{x+3}$$

Осталось найти, при каком x значение функции равно 9:

$$f(x) = 9 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{3})^{x+3} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{3})^{x+3} = (\sqrt{3})^4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

<u>№11</u>

Найдите точку максимума функции:

$$y = x \cdot \frac{x+2}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

на промежутке $[0;2]$.

Ответ

1

Решение

ОДЗ: x – любое число.

1)

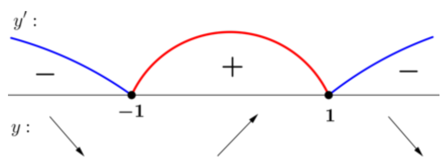
$$y' = \frac{x+2}{e^x} + x \cdot \frac{e^x - e^x(x+2)}{e^{2x}} - \frac{1}{e^x} = \frac{x+2}{e^x} + x \cdot \frac{1-(x+2)}{e^x} - \frac{1}{e^x} = \frac{1-x^2}{e^x}$$

Найдём критические точки (то есть внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна нулю или не существует):

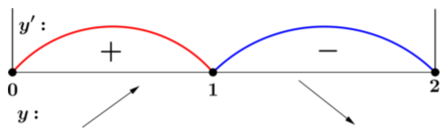
$$\frac{1-x^2}{e^x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Производная существует при любом x.

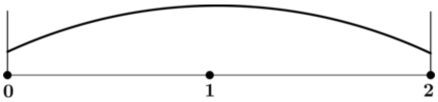
2) Найдём промежутки знакопостоянства y':



3) Найдём промежутки знакопостоянства y' на рассматриваемом промежутке $[0;2]$:



4) Эскиз графика y на промежутке $[0;2]$:



Таким образом, $x = 1$ – точка максимума функции y на $[0;2]$.

№12

а) Решите уравнение $27^x - 4 \cdot 3^{x+2} + 3^{5-x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\log_7 4; \log_7 16]$.

Ответ

а) 1; $\frac{3}{2}$.

б) 1.

Решение

а) Так как $27^x = (3^x)^3$, $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2$, $3^{5-x} = 3^5 : 3^x$, то после замены $3^x = t, t > 0$, уравнение примет вид:

$$t^3 - 4 \cdot 9 \cdot t + \frac{3^5}{t} = 0 \Big| \cdot t > 0$$
$$t^4 - 36t^2 + 3^5 = 0$$

Данное уравнение является биквадратным и решается как квадратное относительно t^2.
$D = 36^2 - 4 \cdot 3^5 = 3^4 \cdot 4(4-3) = 3^4 \cdot 4$, следовательно, $\sqrt{D} = 3^2 \cdot 2 = 18$. Следовательно:

$$t^2 = 27 \quad \text{и} \quad t^2 = 9$$

Тогда, учитывая, что $t > 0$, получаем решения: $t = 3\sqrt{3}$ и $t = 3$. Сделаем обратную замену:

$$x = \log_3 3\sqrt{3} = \log_3 \left(3^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad x = \log_3 3 = 1$$

б) Отберем корни.

Так как $y = \log_7 x$ — возрастающая функция, то чем больше x, тем больше y. Следовательно:

$$\log_7 4 < \log_7 7 = 1 < \log_7 16$$

Значит, $x = 1$ лежит в отрезке $[\log_7 4; \log_7 16]$; $\frac{3}{2} = \log_7 7\sqrt{7}$.

Сравним $7\sqrt{7}$, 4 и 16:

$4 < 7\sqrt{7}$;

$7\sqrt{7} \ \vee \ 16$, $\quad (7\sqrt{7})^2 \ \vee \ 16^2$, $\quad 343 \ \vee \ 256$. Таким образом, так как $343 > 256$, то $7\sqrt{7} > 16$, следовательно, $\log_7(7\sqrt{7}) > \log_7 16$, следовательно, $\frac{3}{2}$ не входит в отрезок $[\log_7 4; \log_7 16]$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Комментарий

Ответ в задании с развёрнутым ответом – это решение и вывод (называемый ответом).

№13

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $B_1N = 6$.

Ответ

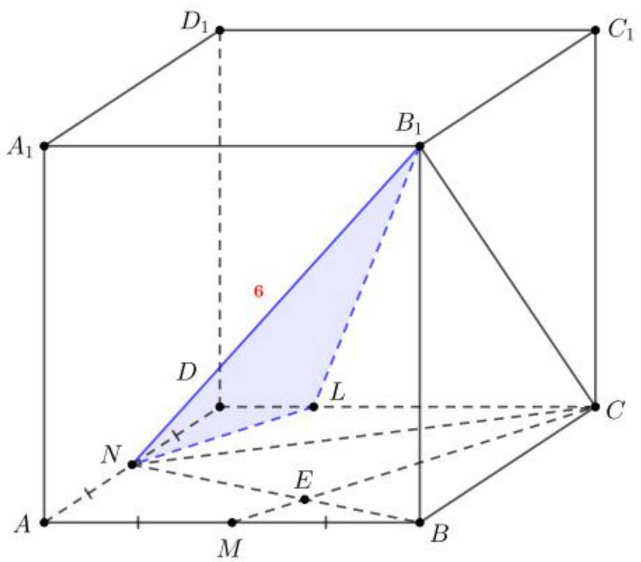
б) $x = \frac{4}{5}\sqrt{5}$.

Решение

а) Пусть отрезки NB и MC пересекаются в точке E. Прямоугольные треугольники NAB и MBC равны по двум катетам, значит:

$$\angle MEB = 180^\circ - (\angle EMB + \angle EBM) = 180^\circ - (\angle EMB + \angle MCB) = 90^\circ$$

Отрезок BN — проекция отрезка B_1N на плоскость (ABC). Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах прямые B_1N и CM перпендикулярны.



б) Пусть плоскость α пересекает ребро CD в точке L. Прямые NL и CM, лежащие в плоскости (ABC), параллельны, поскольку прямая NL лежит в плоскости α, параллельной прямой CM. Следовательно, $\angle DLN =$

$\angle DCM = \angle BMC$, а значит, прямоугольные треугольники DLN и BMC подобны по острому углу. Из отношения подобия получаем:

$$DL = BM \cdot \frac{DN}{BC} = \frac{AB}{2} \cdot \frac{AD}{2BC} = \frac{CD}{4}$$

Заметим, что $\angle LNB_1 = 90°$, поскольку прямая B_1N перпендикулярна прямой NL, параллельной прямой CM. Пусть ребро куба равно a. По теореме Пифагора получаем:

$$36 = B_1N^2 = AN^2 + AB^2 + BB_1^2 = \frac{9a^2}{4}$$

Кроме того:

$$a = 4;\ BB_1 = 4,\ DN = 2,\ DL = 1,\ CL = 3,\ LN = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Объём пирамиды $CNLB_1$ равен:

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} CL \cdot DN\right) \cdot BB_1 = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

С другой стороны, объём этой пирамиды равен:

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} B_1N \cdot LN\right) \cdot x = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \sqrt{5} \cdot x = x\sqrt{5}$$

Где x — расстояние от точки C до плоскости α. Из равенства $x\sqrt{5} = 4$ получаем $x = \dfrac{4}{5}\sqrt{5}$.

Содержание критерия	**Балл**
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

№14

Решите неравенство:

$$\log_{x^2+1}(x-3)^2 \cdot \log_{x^2+1}\frac{(x-3)^2}{(x^2+1)^3} \leqslant -2$$

Ответ

$x \in (-\infty; -2] \cup \left[1; \frac{4}{3}\right]$.

Решение

Найдем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x^2+1>0 \\ x^2+1\neq 1 \\ (x-3)^2>0 \\ \dfrac{(x-3)^2}{(x^2+1)^3}>0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 3 \end{cases}$$

Таким образом, ОДЗ неравенства: $x\in(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$. Решим неравенство на ОДЗ:

$$\log_{x^2+1}(x-3)^2\cdot\left(\log_{x^2+1}(x-3)^2-\log_{x^2+1}(x^2+1)^3\right)\leqslant -2$$

Сделаем замену $t=\log_{x^2+1}(x-3)^2$, тогда неравенство примет вид:

$$t(t-3)\leqslant -2 \quad\Leftrightarrow\quad (t-1)(t-2)\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1\leqslant t\leqslant 2$$

Сделаем обратную подстановку:

$$\begin{cases} \log_{x^2+1}(x-3)^2\geqslant 1 \\ \log_{x^2+1}(x-3)^2\leqslant 2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \log_{x^2+1}(x-3)^2\geqslant \log_{x^2+1}(x^2+1) \\ \log_{x^2+1}(x-3)^2\leqslant \log_{x^2+1}(x^2+1)^2 \end{cases}$$

Заметим, что так как на ОДЗ $x^2>0$, то $x^2+1>1$, следовательно, основания логарифмов больше единицы, а значит, оба неравенства системы равносильны:

$$\begin{cases} (x-3)^2\geqslant x^2+1 \\ (x-3)^2\leqslant (x^2+1)^2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\leqslant \dfrac{4}{3} \\ (x-3-x^2-1)(x-3+x^2+1)\leqslant 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\leqslant \dfrac{4}{3} \\ (x^2-x+4)(x+2)(x-1)\geqslant 0 \end{cases}$$

Решая второе неравенство методом интервалов, получим $x\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$. После пересечения данного множества с $x\leqslant\frac{4}{3}$ и с ОДЗ получим окончательный ответ:

$$x\in(-\infty;-2]\cup\left[1;\frac{4}{3}\right]$$

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением/включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «$<$» вместо «$\leqslant$» или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то выставляется оценка «0 баллов».**

№15

Строительство нового завода стоит 159 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2+2x+6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы в млн рублей за один год составит $px-(0,5x^2+2x+6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p=10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

Ответ

За 4 года.

Решение

Найдем такое количество производимой продукции x, при котором прибыль фирмы будет наибольшей при фиксированном p. Для этого нам мужно найти максимум выражения $px-(0,5x^2+2x+6)$.

$$\begin{gathered} px-(0,5x^2+2x+6)= \\ =-0,5x^2+(p-2)x-6=-0,5(x^2-2(p-2)x+12)= \\ =-0,5(x^2-2(p-2)x+(p-2)^2-(p-2)^2+12)= \\ =-0,5(x-p+2)^2+0,5(p-2)^2-6 \end{gathered}$$

Заметим, что $-0,5(x-p+2)^2\leqslant 0$, поэтому:

$$-0,5(x-p+2)^2+0,5(p-2)^2-6\leqslant 0,5(p-2)^2-6$$

Значит, максимальное значение выражения $px-(0,5x^2+2x+6)$ равно $0,5(p-2)^2-6$ и достигается при $x-p+2=0$. Отсюда $x=p-2$, то есть за каждый год фирма будет зарабатывать $0,5(p-2)^2-6$ млн рублей.

В первый год $p=10$. Тогда прибыль фирмы за этот год составит $0,5(10-2)^2-6=26<159$ млн рублей.

Прибыль фирмы за второй год составит $0,5(11-2)^2-6=34,5$ млн рублей, так как $p=11$. Значит, за первые два года фирма заработает $26+34,5=60,5<159$ млн рублей.

Прибыль фирмы за третий год составит $0,5(12-2)^2-6=44$ млн рублей, так как $p=12$. Значит, за первые три года фирма заработает $60,5+44=104,5$ млн рублей.

Прибыль фирмы за четвертый год составит $0,5(13-2)^2-6=54,5$ млн рублей, так как $p=13$. Всего за первые четыре года фирма заработает $104,5+54,5=159$ млн рублей. Значит, строительство окупится за 4 года.

Содержание критерия	**Балл**
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Подробнее: 1 балл выставляется в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи, но именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию, и т.п. Предъявленный текст должен включать описание того, как построена модель.

№16

В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а угол BDC равен $75°$. Точка P лежит вне прямоугольника, а угол APB равен $150°$.

а) Докажите, что углы BAP и POB равны.

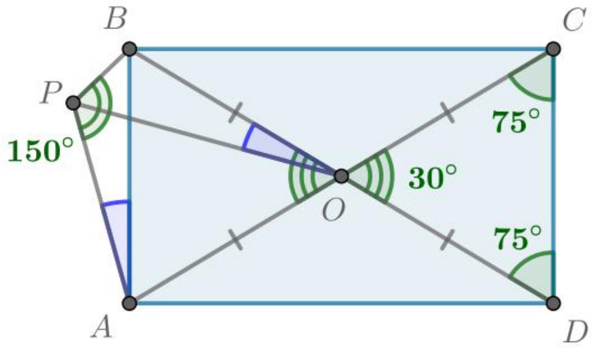
б) Прямая PO пересекает сторону CD в точке F. Найдите CF, если $AP=6\sqrt{3}$ и $BP=4$.

Ответ

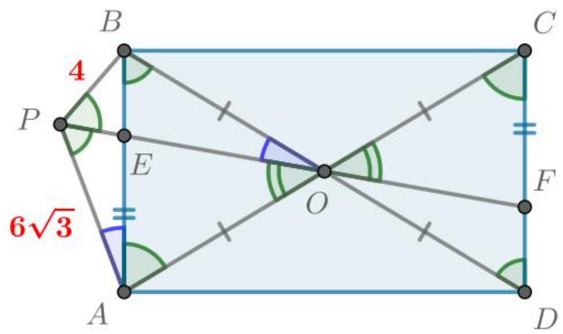
б) $\dfrac{378-84\sqrt{3}}{23}$.

Решение

а) Рассмотрим треугольник COD. Он равнобедренный ($OD = OC$), т.к. половинки диагоналей прямоугольника равны, значит, $\angle DOC = 180^\circ - 2\cdot 75^\circ = 30^\circ = \angle BOA$. В четырехугольнике $APBO$ сумма противоположных углов $\angle APB$ и $\angle BOA$ равна $150^\circ + 30^\circ = 180^\circ$, следовательно, $APBO$ — вписанный. Тогда углы BAP и POB равны, т.к. это углы, опирающиеся на сторону PB вписанного четырехугольника.



б) Пусть E — точка пересечения PO и AB. Тогда треугольники EAO и FCO равны по стороне ($OA = OC$) и двум углам ($\angle COF = \angle AOE$ как вертикальные, $\angle FCO = \angle EAO$ из параллельности $AB \parallel CD$). Тогда $EA = CF$.



По теореме косинусов для треугольника PBA:

$$AB = \sqrt{PB^2 + PA^2 - 2PB\cdot PA\cos APB} = \sqrt{16 + 108 - 2\cdot 4\cdot 6\sqrt{3}\cos 150^\circ} = 14$$

$APBO$ — вписанный, хорды OA и OB равны, следовательно, вписанные углы, которые на них опираются, тоже равны $\angle APO = \angle OPB$. Тогда PE — биссектриса угла P треугольника APB и по свойству биссектрисы:

$$\frac{PB}{PA} = \frac{EB}{EA} \quad\Rightarrow\quad \frac{PA+PB}{PA} = \frac{EA+EB}{EA} \quad\Rightarrow\quad EA = \frac{(EA+EB)\cdot PA}{PA+PB} = \frac{AB\cdot PA}{PA+PB} =$$
$$= \frac{84\sqrt{3}}{4+6\sqrt{3}} = \frac{84\sqrt{3}(6\sqrt{3}-4)}{(4+6\sqrt{3})(6\sqrt{3}-4)} = \frac{378-84\sqrt{3}}{23}$$

Содержание критерия	Балл
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

№17

Найдите все a, при которых корни уравнения:

$$x^2 - (2a+1)x + a^2 + 2 = 0$$

отличаются в два раза.

Ответ

$a = 4$.

Решение

Данное уравнение квадратное при всех значениях параметра. Пусть t и $2t$ — два его различных корня. Тогда дискриминант уравнения положителен и выполнена теорема Виета:

$$\begin{cases} D = (2a+1)^2 - 4(a^2+2) > 0 \\ t + 2t = 2a + 1 \\ t \cdot 2t = a^2 + 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > \dfrac{7}{4} \\ t = \dfrac{2a+1}{3} \\ t^2 = \dfrac{a^2+2}{2} \end{cases}$$

Из втого и третьего уравнений системы получаем:

$$a^2 - 8a + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

Найденное a удовлетворяет условию $D > 0$. Тогда при $a = 4$ получаем уравнение $x^2 - 9x + 18 = 0$ с корнями $x_1 = 3, x_2 = 6$, отличающимися в два раза.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, получилось одно значение a, и при этом верно выполнены все шаги решения	2 3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, получилось несколько значений a, и при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию расположения параболы (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

№18

На участке высадили ясени и дубы, причем всего было высажено больше 14 деревьев. Если бы ясеней посадили в два раза больше, а дубов — на 20 больше, то дубов было бы больше, чем ясеней. Если же дубов станет в два раза больше, а количество ясеней увеличится на 2, то ясеней будет больше, чем дубов.

а) Могли ли посадить 12 ясеней и 6 дубов?

б) Могли ли посадить 13 ясеней и 6 дубов?

в) Какое наибольшее число дубов могли посадить?

Ответ

а) Могли.

б) Не могли.

в) 7.

Решение

Обозначим количество ясеней через x, количество дубов через y. Запишем систему неравенств, отражающую все условия задачи

$$\begin{cases} x + y > 14 \\ 2x < y + 20 \\ 2y < x + 2 \end{cases}$$

а) Проверим, является ли пара $x = 12,\ y = 6$ решением системы.

$$\begin{cases} 12 + 6 > 14 \\ 2 \cdot 12 < 6 + 20 \\ 2 \cdot 6 < 12 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 > 14 \\ 24 < 26 \\ 12 < 14 \end{cases}$$

Все условия удовлетворены, значит, такое возможно.

б) Проверим, является ли пара $x = 13,\ y = 6$ решением системы.

$$\begin{cases} 13 + 6 > 14 \\ 2 \cdot 13 < 6 + 20 \\ 2 \cdot 6 < 13 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19 > 14 \\ 26 < 26 \\ 12 < 15 \end{cases}$$

При таком количестве дубов и ясеней нарушается второе неравенство системы, значит, такого быть не могло.
в) Из второго неравенства системы получим

$$2x < y + 20 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{y}{2} + 10$$

Объединяя результат с третьим неравенством системы, получим

$$2y < x + 2 < \left(\frac{y}{2} + 10\right) + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2y < \frac{y}{2} + 12 \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}5y < 12 \quad \Leftrightarrow \quad y < 8$$

Мы доказали, что количество дубов не должно превышать 8. Попробуем найти такое количество x ясеней, чтобы при 7 дубах все неравенства системы были удовлетворены. Для этого просто подставим в систему $y = 7$ и решим ее относительно x.

$$\begin{cases} x + 7 > 14 \\ 2x < 7 + 20 \\ 2 \cdot 7 < x + 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 7 \\ x < 13{,}5 \\ 12 < x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 12 < x < 13{,}5$$

При 13 ясенях и 7 дубах все условия выполняются, следовательно, максимально возможное количество дубов равно 7.

Содержание критерия	**Балл**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта "а" ; — обоснованное решение пункта "б" ; — искомая оценка в пункте "в" ; — пример в пункте "в" , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4