ЗАДАНИЕ 21

Уравнения, неравенства и алгебраические выражения

Блок 1: Уравнения.

Первый тип: Разложение на множители

Прототип 1: $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$ (метод группировки)

$x^2(x-2)-4(x-2)=0$

$(x-2)(x^2-4)=0$

$x-2=0 \qquad x^2-4=0$

$x=2 \qquad x=\pm 2$

Ответ: $-2; 2$.

Прототип 2: $(2x-1)(x+4)(x-2) = (x+4)(2x+3)(x-2)$

$(2x-1)(x+4)(x-2)-(x+4)(2x+3)(x-2)=0$

$(x+4)(x-2)(\underbrace{2x-1-2x-3}_{-4\neq 0})=0$

$x+4=0 \qquad x-2=0$

$x=-4 \qquad x=2$

Ответ: $-4; 2$.

Прототип 3: $(x-3)^2(x+1) = 4(3-x)$

$(a-b)^{2n}=(b-a)^{2n}$

$(a-b)^{2n+1}=-(b-a)^{2n+1}$

$(3-x)^2(x+1)-4(3-x)=0$

$(3-x)((3-x)(x+1)-4)=0$

$3-x=0 \qquad (3-x)(x+1)-4=0$

$x=3 \qquad x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

Ответ: $1; 3$.

Прототип 4: $(x-7)^3 = 4x - 28$

$(x-7)^3=4(x-7)$

$(x-7)^3-4(x-7)=0$

$(x-7)((x-7)^2-4)=0$

$x^2=a \ (a\geq 0)$

$x=\pm\sqrt{a}$

$x-7=0 \qquad (x-7)^2-4=0$

$x=7 \qquad (x-7)^2=4$

$\left[\begin{array}{l} x-7=2 \\ x-7=-2 \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=5 \end{array}\right.$

Ответ: $5; 7; 9$.

Прототип 5: $x(x^2 - 2x + 1) = 20(x-1)$ → квадрат разности

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$x(x-1)^2-20(x-1)=0$

$(x-1)(x(x-1)-20)=0$

$x-1=0 \qquad x(x-1)-20=0$

$x=1 \qquad x^2-x-20=0$

$\left[\begin{array}{l} 1 \\ -20 \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} -4 \\ 5 \end{array}\right.$

Ответ: $-4; 1; 5$.

1.1) $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$
1.2) $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$
1.3) $x^3 + 7x^2 + 3x + 21 = 0$
1.4) $4x^3 - x^2 + 64x - 16 = 0$
1.5) $2x^3 + x^2 - 50x - 25 = 0$
1.6) $5x^3 + x^2 - 20x - 4 = 0$
1.7) $2x^3 + 3x^2 - 32x - 48 = 0$
2.1) $(x+1)(x-5)(x+10) = (x+10)(x+1)(x-12)$
2.2) $(3x-4)(x-8)(2x-7) = (2x-7)(4-3x)$
2.3) $(5x+1)(x-9)(4x+5) = x(x-9)(4x+5)$
2.4) $(2-x)(x-7)(5x+7) = (7-x)(7+5x)$
2.5) $(x-12)(1-2x)(x-3) = (2x-1)(x+13)(x-3)$
2.6) $(4x+1)(x-1)(x+4) = 9(4x+1)(x+4)$
2.7) $(10x+2)(x-5)(x+5) = 25(x-5)(2+10x)$
3.1) $(x+2)(x+5)^2 = -2(x+5)$
3.2) $(2x+1)^2(x+3) = 25(2x+1)$
3.3) $(3x+1)(x-2)^2 = 6(x-2)$
3.4) $(3-2x)^2(x-1) = 6(2x-3)$
3.5) $(5x-2)(x+2)^2 = -4(2+x)$
3.6) $(4x-1)^2(x-7) = 31(4x-1)$
3.7) $(x+6)(x-9)^2 = -54(9-x)$
4.1) $(x+8)^3 = 16x + 128$
4.2) $(2x+3)^3 = 9(2x+3)$
4.3) $(5x-7)^3 = 7 - 5x$
4.4) $(x-11)^3 = 64(x-11)$
4.5) $(2x-11)^3 = 2x - 11$
4.6) $(4x+5)^3 = 81(5+4x)$
4.7) $(8x-3)^3 = 32x - 12$
5.1) $x(x^2+4x+4) = 3x + 6$
5.2) $x(x^2-6x+9) = -10(3-x)$
5.3) $x(x^2-8x+16) = 12x - 48$
5.4) $x(x^2+10x+25) = 24(x+5)$
5.5) $x(x^2+12x+36) = 16x + 96$
5.6) $x(x^2-18x+81) = -36(9-x)$
5.7) $x(x^2+24x+144) = 13x + 156$

! Совет: в прототипах ОГЭ при решении уравнений/неравенств – стоит раскладывать выражения на множители, а не раскрывать скобки.

Второй тип: Замена переменной

Прототип 6: $(x+2)^4-4(x+2)^2-5=0$

Пусть $(x+2)^2=a$, тогда: $a^2-4a-5=0$

$(a\geq 0)^*$

$\begin{cases}4\\-5\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}-1 \text{ - не уд.*}\\5\end{array}\right.$

Обратная подстановка: $(x+2)^2=5$

$\left[\begin{array}{l}x+2=\sqrt{5}\\x+2=-\sqrt{5}\end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{5}-2\\x=-\sqrt{5}-2\end{array}\right.$

Ответ: $-\sqrt{5}-2$; $\sqrt{5}-2$.

Прототип 7: $\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{2}{x+2}-3=0$

Пусть $\dfrac{1}{x+2}=a$, тогда: $a^2+2a-3=0$

$\begin{cases}-2\\-3\end{cases}$, $\left[\begin{array}{l}-3\\1\end{array}\right.$

Обратная подстановка:

(1) $\dfrac{1}{x+2}=-3$

$x+2=-\dfrac{1}{3}$

$x=-2\dfrac{1}{3}$

(2) $\dfrac{1}{x+2}=1$

$x+2=1$

$x=-1$

Ответ: $-2\dfrac{1}{3}$; -1.

7.1) $(x+1)^4+(x+1)^2-6=0$

7.2) $(x+3)^4+2(x+3)^2-8=0$

7.3) $(x-7)^4-2(x-7)^2-3=0$

7.4) $(2x+1)^4-(2x+1)^2-6=0$

7.5) $(5x-3)^4-3(5x-3)^2-10=0$

7.6) $(x+5)^4+6(x+5)^2-7=0$

7.7) $(1-4x)^4-4(1-4x)^2-21=0$

8.1) $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}-6=0$

8.2) $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{x-1}-10=0$

8.3) $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x}-4=0$

8.4) $\dfrac{1}{(3-x)^2}+\dfrac{4}{3-x}-12=0$

8.5) $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x}-4=0$

8.6) $\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{3}{x+1}-10=0$

8.7) $\dfrac{8}{x^2}-\dfrac{13}{x}-7=0$

Третий тип: Специальные свойства/ограничения

Прототип 8: $x^2-6x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+7$

$x^2-6x-7=0$

$\begin{cases}6\\-7\end{cases}$, $\left[\begin{array}{l}-1\\7 \text{ - не уд.*}\end{array}\right.$

* $6-x\geq 0$

$x\leq 6$

$\sqrt{a}$, $a\geq 0$

Ответ: -1.

Прототип 9: $\dfrac{2x^2+x-6}{x^2-4}=3$

$2x^2+x-6=3(x^2-4)$

$x^2-x-6=0$

$\begin{cases}1\\-6\end{cases}$, $\left[\begin{array}{l}-2 \text{ - не уд.*}\\3\end{array}\right.$

* $x^2-4\neq 0$

$x\neq \pm 2$

$\dfrac{a}{b}$, $b\neq 0$

Ответ: 3.

8.1) $x^2-2x+\sqrt{x-2}=\sqrt{x-2}+3$

8.2) $x^2-3x+\sqrt{5-x}=\sqrt{5-x}+18$

8.3) $x^2-4x+\sqrt{x-4}=5+\sqrt{x-4}$

8.4) $x^2-2x-\sqrt{3-x}=8-\sqrt{3-x}$

8.5) $x^2+x+\sqrt{8-x}=\sqrt{8-x}+90$

9.1) $\dfrac{3x^2+x-4}{x^2-1}=4$

9.2) $\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2-x-28}=1$

9.3) $\dfrac{2x^2+3x-20}{2x^2-11x+15}=2$

9.4) $\dfrac{x^2+8x+7}{4x^2-x-5}=\dfrac{1}{2}$

9.5) $\dfrac{6x^2-7x-3}{9x^2-1}=\dfrac{2}{3}$

При решении прототипов 10 и 11 будем использовать следующие свойства:

(1) $a^{2n+1}=b^{2n+1} \Leftrightarrow a=b$, где $2n+1$ – нечётная степень

(2) $a^{2n}=b^{2n} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right.$, где $2n$ – чётная степень

Прототип 10: $x^4=(2x-3)^2$

$(x^2)^2=(2x-3)^2$ * чётная степень

$\left[\begin{array}{l} x^2=2x-3 \\ x^2=-2x+3 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2-2x+3=0 - \varnothing, \text{т.к. } D<0 \\ x^2+2x-3=0 \longrightarrow \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}, \left[\begin{array}{l} -3 \\ 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Ответ: $-3; 1$.

Прототип 11: $x^6=(16x-55)^3$

$(x^2)^3=(16x-55)^3$ * нечётная степень

$x^2=16x-55$

$x^2-16x+55=0$

$\begin{cases} 16 \\ 55 \end{cases}, \left[\begin{array}{l} 5 \\ 11 \end{array}\right.$

Ответ: $5; 11$.

Прототип 12: $(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$

$a^{2n}\geq 0$ при любом значении „a" ($a\in R$)

Т.к. $(x^2-25)^2\geq 0$ и $(x^2+3x-10)^2\geq 0$ при $x\in R$, их сумма будет равна нулю только тогда, когда оба выражения одновременно обращаются в нуль, т.е.:

$\begin{cases} x^2-25=0 \\ x^2+3x-10=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -5 \\ 2 \end{array}\right. \end{cases}$

Общий корень, при котором это выполняется: $x=-5$.

Ответ: -5.

10.1) $x^4=(x-2)^2$

10.2) $x^4=(2x-15)^2$

10.3) $x^4=(5x+36)^2$

10.4) $x^4=(x-6)^2$

10.5) $x^4=(21-4x)^2$

10.6) $x^4=(3x-10)^2$

10.7) $x^4=(x-20)^2$

11.1) $x^6=(11x-24)^3$

11.2) $x^6=(2x+3)^3$

11.3) $x^6=(41-40x)^3$

11.4) $x^6=(2x+63)^3$

11.5) $x^6=(11x+12)^3$

11.6) $x^6=(17x-72)^3$

11.7) $8x^6=(13x+7)^3$

12.1) $(x^2-16)^2+(x^2+x-12)^2=0$

12.2) $(x^2-9)^2+(x^2-2x-15)^2=0$

12.3) $(x^2-4)^2+(x^2-6x-16)^2=0$

12.4) $(x^2-1)^2+(x^2-6x-7)^2=0$

12.5) $(x^2-36)^2+(x^2+4x-12)^2=0$

12.6) $(x^2-49)^2+(x^2+4x-21)^2=0$

12.7) $(x^2-4)^2+(x^2-3x-10)^2=0$