

ЗАДАНИЕ 21

Уравнения, неравенства и алгебраические выражения

Блок 2: Системы уравнений.

Первый тип: Метод подстановки

Алгоритм: 1) выразить одну неизвестную величину через вторую (удобно выбирать ту, у которой коэффициент ± 1);
 2) подставить в другое уравнение и решить получившееся;
 3) подставив найденные значения в п. 2 найти значение второй; 4) записать ответ в виде пар чисел $(x; y)$

Прототип 1:

$$(1) \begin{cases} 3y - x = 8 \\ x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow x = 3y - 8 \text{ (подставим во (2))}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{y+1}{3} = 4 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3(x+y) - 2(y+1) = 24 \\ 3x + 3y - 2y - 2 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 26 \end{cases}$$

$$\rightarrow 3(3y - 8) + y = 26$$

$$9y + y = 26 + 24$$

$$10y = 50, y = 5 \Rightarrow x = 3 \cdot 5 - 8 = 7$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$$

Ответ: $(7; 5)$.

$$1.1) \begin{cases} 5x + y = 25 \\ \frac{1-3x}{4} + \frac{2y+1}{3} = 5 \end{cases}$$

$$1.2) \begin{cases} x - y = 14 \\ \frac{y+4}{6} - \frac{x-1}{3} = -2 \end{cases}$$

$$1.3) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ \frac{x-2y}{2} + \frac{x-3}{4} = 1 \end{cases}$$

$$1.4) \begin{cases} 4x - y = 2 \\ \frac{1}{4} - \frac{2-3x}{2} = \frac{y}{6} \end{cases}$$

$$1.5) \begin{cases} x + 7y = -65 \\ \frac{2x-y}{5} - \frac{y}{2} = 9 \end{cases}$$

Прототип 2:

$$(1) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x^2 + 4xy = 33 \end{cases} \Rightarrow x = 2y + 1$$

$$(2) x^2 + 4xy = 33$$

$$(2) (2y+1)^2 + 4y(2y+1) - 33 = 0$$

$$4y^2 + 4y + 1 + 8y^2 + 4y - 33 = 0$$

$$12y^2 + 8y - 32 = 0 \quad | :4$$

$$3y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$\begin{cases} -2 \\ -24 \end{cases}, \begin{cases} -6 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 4/3 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = -2 \cdot 2 + 1 = -3 \\ x_2 = 8/3 + 1 = 11/3 \end{cases}$$

Ответ: $(-3; -2); (11/3; 4/3)$.

$$2.1) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 - 4y^2 = 35 \end{cases}$$

$$2.2) \begin{cases} 3x + y = 1 \\ y^2 + 8x + y = 26 \end{cases}$$

$$2.3) \begin{cases} 5x - y = 11 \\ 2xy - y^2 = -5 \end{cases}$$

$$2.4) \begin{cases} 4y - x = 21 \\ 2x^2 + 3y = 17 \end{cases}$$

$$2.5) \begin{cases} x + y = 7 \\ 5x - y^2 + xy = -5 \end{cases}$$

Второй тип: Метод алгебраического сложения (вычитания)

Если при сложении (вычитании) уравнений системы можно получить уравнение с одной неизвестной (или упростить само решение). Особенно актуально, когда не удаётся (или неудобно) выразить одну из неизвестных через другую.

Прототип 3:

$$+ \begin{cases} x^2 + 5x - y^2 = 13 \\ x^2 - 4x + y^2 = -3 \end{cases} *$$

$$\underline{2x^2 + x = 10}$$

$$2x^2 + x - 10 = 0$$

$$\begin{cases} -1 \\ -20 \end{cases}, \begin{cases} -5 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2,5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Подставим в*: при $x = -2,5$: $6,25 + 10 + y^2 = -3$
 $y^2 = -19,25$ - решений нет
 при $x = 2$: $4 - 8 + y^2 = -3$
 $y^2 = 1$, $y = \pm 1$

Ответ: $(2; 1); (2; -1)$

Прототип 4:

$$- \begin{cases} (2x - 5)^2 = 2y \\ (3x - 10)^2 = 2y \end{cases} *$$

$$\underline{(3x - 10)^2 = 2y}$$

$$(2x - 5)^2 - (3x - 10)^2 = 0$$

$$(2x - 5)^2 = (3x - 10)^2$$

$$\begin{cases} 2x - 5 = 3x - 10 \\ 2x - 5 = -3x + 10 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Подставим в*: при $x = 5$: $(2 \cdot 5 - 5)^2 = 2y$
 $2y = 25$, $y = 12,5$
 при $x = 3$: $(2 \cdot 3 - 5)^2 = 2y$
 $2y = 1$, $y = 0,5$

Ответ: $(5; 12,5); (3; 0,5)$

3.1) $\begin{cases} y^2 + 2x = \\ y^2 - 4y + x = -4 \end{cases}$

3.2) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 6 \\ 4x^2 + 5y^2 = 56 \end{cases}$

3.3) $\begin{cases} x^2 - 8x + 2y^2 = 11 \\ 2x^2 - 3x - 6y^2 = 23 \end{cases}$

3.4) $\begin{cases} x^2 + 5x - y^2 = 13 \\ x^2 - 4x + y^2 = -3 \end{cases}$

4.1) $\begin{cases} (4y - 3)^2 = x \\ (y - 1)^2 = x \end{cases}$

4.2) $\begin{cases} (5x - 2)^2 = 5x \\ (5x - 2)^2 = y \end{cases}$

4.3) $\begin{cases} (3 - 2x)^2 = y \\ (x + 1)^2 = y \end{cases}$

4.4) $\begin{cases} (3x + 2)^2 = -25x \\ (3x + 2)^2 = y \end{cases}$

Третий тип: Использование ФСУ

Прототип 5:

$$+ \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases} | \cdot 2$$

$$* \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 25 + 24 \\ (x + y)^2 = 49 \end{cases}$$

$$x + y = 7 \Rightarrow x = 7 - y$$

$$(x + y)^2 = 49$$

(1) $x + y = 7 \Rightarrow x = 7 - y$

(2) $x + y = -7 \Rightarrow x = -y - 7$

Подставим в*

$$y(7 - y) = 12$$

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$\begin{cases} 7 \\ 12 \end{cases}, \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$y(-y - 7) = 12$$

$$y^2 + 7y + 12 = 0$$

$$\begin{cases} -7 \\ 12 \end{cases}, \begin{cases} y_3 = -3 \\ y_4 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -4 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

Ответ: $(4; 3); (3; 4); (-4; -3); (-3; -4)$

5.1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$

5.2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$

5.3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 53 \\ xy = 14 \end{cases}$

5.4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ xy = 24 \end{cases}$