ЗАДАНИЕ 13 ИЗ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

УРАВНЕНИЕ

Оглавление

1 Образцы заданий 2018 года **5**

2 Образцы заданий 2017 года **17**

3 Образцы заданий 2016 года **35**

4 Образцы заданий 2015 года **45**

5 Образцы заданий 2014 года **53**

6 Образцы заданий 2013 года **61**

7 Образцы заданий 2012 года **71**

8 Образцы заданий 2011 года **79**

Аннотация

В пособии разобраны все прототипы уравнений (№13) за все годы проведения ЕГЭ. Все решения являются авторскими. Автор разрешает свободное использование пособия в учебных целях.

Пожелания учащимся

Уравнение №13 на экзамене верно решают около 40% учеников. Автор надеется, что это пособие поможет вам войти в их число. Обсуждайте решения с одноклассниками, задавайте вопросы учителям, репетиторам и на сайтах самоподготовки. Ведь активность в учебе – залог успеха!

Об авторе

Тимур Гуев – сотрудник Mail.Ru Group, учитель математики школы №1363, программист. Основатель и преподаватель онлайн-школы BEEGEEK.

Открыт для обсуждения, критики и сотрудничества.

Глава 1

Образцы заданий 2018 года

1. а) Решите уравнение $\dfrac{\sin x}{\cos^2 \dfrac{x}{2}} = 4\sin^2 \dfrac{x}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной x задается условием

$$\cos \frac{x}{2} \neq 0 \iff \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \iff x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Умножая обе части уравнения на $\cos^2 \dfrac{x}{2} \neq 0$, получим:

$$\sin x = 4\sin^2 \frac{x}{2}\cos^2 \frac{x}{2} \iff \sin x = \left(2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}\right)^2 \iff \sin x = \sin^2 x \iff$$

$$\iff \sin x \cdot (\sin x - 1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ, корнями уравнения являются серии

$$x = 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -4\pi,\ x = -\frac{7\pi}{2}.$$

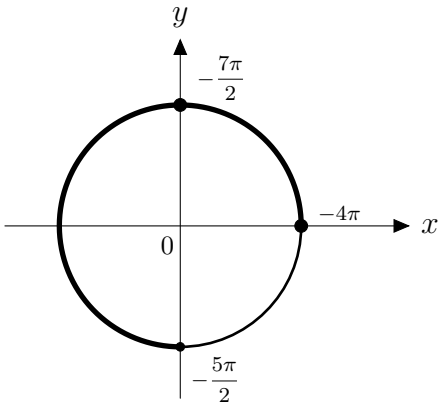
Ответ: а) $2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-4\pi;\ -\dfrac{7\pi}{2}$.

2. а) Решите уравнение $\dfrac{\cos x}{\sin x + 1} = \sin x - 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной x задается условием

$$\sin x + 1 \neq 0 \iff \sin x \neq -1 \iff x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$



Умножая обе части уравнения на $\sin x + 1 \neq 0$, получим:

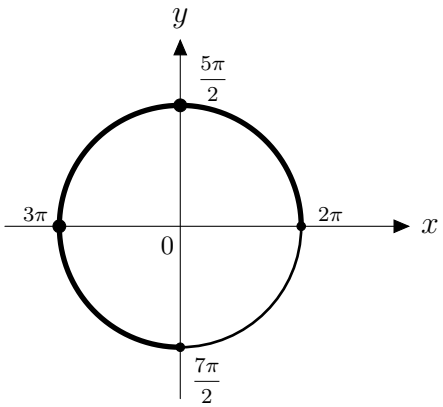
$$\cos x = (\sin x - 1)\cdot(\sin x + 1) \iff \cos x = \sin^2 x - 1 \iff \cos x = -\cos^2 x \iff$$

$$\iff \cos x(\cos x + 1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = -1\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ, корнями уравнения являются серии

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ x = \pi + 2\pi m,\ k,\ m \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:



$$x = \frac{5\pi}{2},\ x = 3\pi.$$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \pi + 2\pi m,\ k,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{5\pi}{2};\ 3\pi$.

3. а) Решите уравнение

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\sqrt{3};\ \sqrt{30}\right]$.

Решение. а) Имеем:

$$\begin{cases} 3-x \geqslant 0 \\ x^3-4x^2-10x+29=(3-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leqslant 3 \\ x^3-5x^2-4x+20=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \leqslant 3 \\ x^2(x-5)-4(x-5)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leqslant 3 \\ (x-5)(x-2)(x+2)=0 \end{cases} \iff x=\pm 2.$$

б) Так как $-2=-\sqrt{4}<-\sqrt{3}$, а $2=\sqrt{4}<\sqrt{30}$, то указанному промежутку принадлежит корень $x=2$.

Ответ: а) ± 2; б) 2.

4. а) Решите уравнение

$$\sin x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin 2x+1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\,-2\pi\right]$.

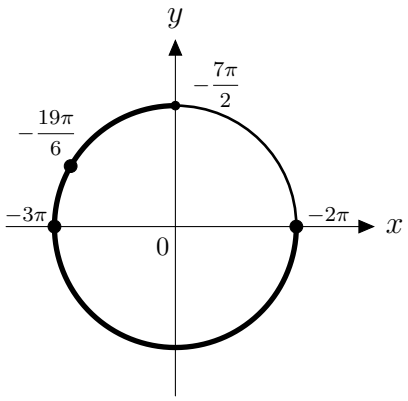
Решение. а) Имеем:

$$\sin x+2\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)=\sqrt{3}\sin 2x+1 \iff \sin x+\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{3}\sin 2x+1$$

$$\iff \sin x+\cos 2x=1 \iff \sin x+1-2\sin^2 x=1 \iff \sin x(1-2\sin x)=0 \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \sin x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right. .$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:



$$x=-\frac{19\pi}{6},\ x=-3\pi,\ x=-2\pi.$$

Ответ: а) πn; $\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, n, k, $m\in\mathbb{Z}$. б) $-\frac{19\pi}{6}$; -3π; -2π.

5. а) Решите уравнение

$$2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\,-\frac{\pi}{2}\right]$.

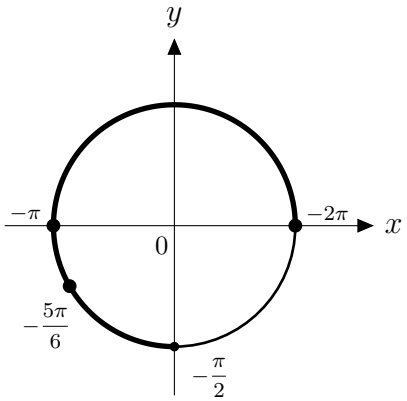
Решение. а) Имеем:

$$2\sin^2 x+\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)=\cos x \iff 2\sin^2 x+\sin x+\cos x=\cos x \iff$$

$$2\sin^2 x+\sin x=0 \iff \sin x(2\sin x+1)=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{7\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\!.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:



$$x=-2\pi,\ x=-\pi,\ x=-\frac{5\pi}{6}.$$

Ответ: а) πn; $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $\frac{7\pi}{6}+2\pi m$, n, k, $m\in\mathbb{Z}$. б) -2π; $-\pi$; $-\frac{5\pi}{6}$.

6. а) Решите уравнение

$$4\sin^3 x=3\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

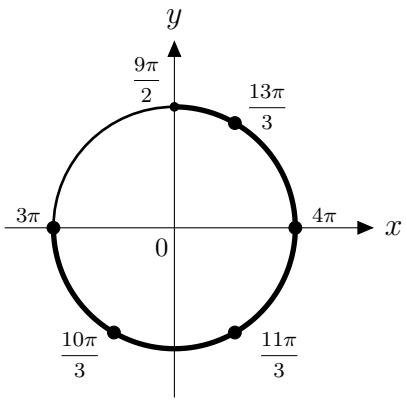
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\,\frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Так как $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, то имеем:

$$4\sin^3 x-3\sin x=0 \iff \sin x(4\sin^2 x-3)=0 \iff \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin^2 x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\!.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:



$$x=3\pi,\ x=4\pi,\ x=\frac{13\pi}{3},\ x=\frac{10\pi}{3},\ x=\frac{11\pi}{3}.$$

Ответ: а) πn; $\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$. б) 3π; 4π; $\dfrac{13\pi}{3}$; $\dfrac{10\pi}{3}$; $\dfrac{11\pi}{3}$.

7. а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2 x=\sqrt{2}\sin x+2.$$

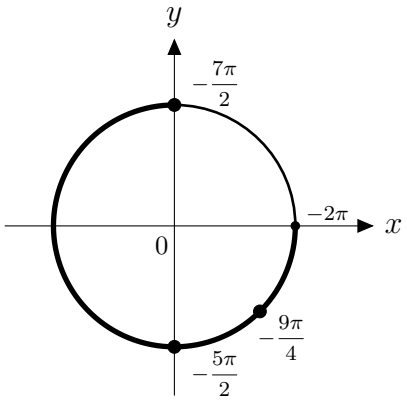
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Решение. а) Имеем:

$$2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)+2\sin^2 x=\sqrt{2}\sin x+2 \iff \sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x+2\sin^2 x=\sqrt{2}\sin x+2$$

$$\iff \sqrt{2}\cos x+2(\sin^2 x-1)=0 \iff \sqrt{2}\cos x-2\cos^2 x=0 \iff \cos x(\sqrt{2}-2\cos x)=0$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\!.$$



б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{7\pi}{2},\ x = -\frac{5\pi}{2},\ x = -\frac{9\pi}{4}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2};\ -\frac{9\pi}{4}$.

8. а) Решите уравнение

$$2\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 2\cos^3 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

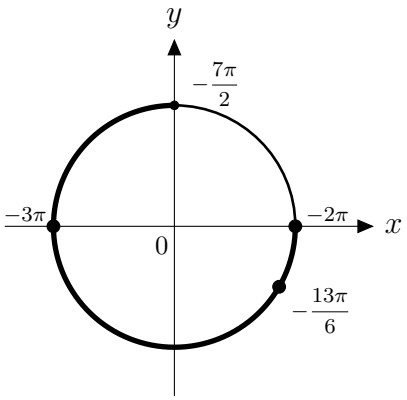
Решение. а) Имеем:

$$2\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{3}\sin^2 x = 0 \iff 2\cos x(1 - \cos^2 x) - \sqrt{3}\sin^2 x = 0 \iff$$

$$2\cos x \sin^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x = 0 \iff \sin^2 x(2\cos x - \sqrt{3}) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 0 \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:



$$x = -3\pi,\ x = -\frac{13\pi}{6},\ x = -2\pi.$$

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$. б) $-3\pi;\ -\frac{13\pi}{6};\ -2\pi$.

9. Решите уравнение

$$x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\sqrt{3};\ \sqrt{20}\right]$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x-1} = t$, $t \geqslant 0$. Тогда $x = t^2 + 1$, имеем:

$$t^2 + 1 - 3t + 1 = 0 \iff t^2 - 3t + 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$$

Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} = 2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x - 1 = 1 \\ x - 1 = 4 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

б) Так как $\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2 < \sqrt{20}$ и $\sqrt{20} < \sqrt{25} = 5$, то указанному промежутку принадлежит корень $x = 2$.

Ответ: а) 2; 5; б) 2.

Комментарий.

Для решения иррационального уравнения можно воспользоваться стандартным равносильным переходом:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \left\{\begin{array}{l} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{array}\right.$$

Имеем:

$$x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0 \iff 3\sqrt{x-1} = x + 1 \iff \left\{\begin{array}{l} x + 1 \geqslant 0 \\ 9(x-1) = (x+1)^2 \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -1 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

Задачи для самостоятельного решения

10. а) Решите уравнение $\dfrac{\sin x}{\sin^2 \dfrac{x}{2}} = 4\cos^2 \dfrac{x}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi n$; $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) -3π; $-\dfrac{7\pi}{2}$.

11. а) Решите уравнение $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = 1 - \cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

Ответ: а) $2\pi n$; $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{3\pi}{2}$; -2π.

12. а) Решите уравнение $\dfrac{\cos x}{1-\sin x} = 1 + \sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi n$; $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{7\pi}{2}$; 4π.

13. а) Решите уравнение

$$\sqrt{x^3 - 6x^2 - 19x + 88} = 5 - x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\sqrt{8};\ \sqrt{30}\right]$.

Ответ: а) ± 3; б) 3.

14. а) Решите уравнение

$$2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) πn; $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi m$, n, k, $m \in \mathbb{Z}$; б) 2π; 3π; $\dfrac{19\pi}{6}$.

15. а) Решите уравнение

$$2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos x = \sqrt{3}\sin 2x - 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi;\ \dfrac{11\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{9\pi}{2}$; $\dfrac{14\pi}{3}$; $\dfrac{16\pi}{3}$; $\dfrac{11\pi}{2}$.

16. а) Решите уравнение

$$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos x=\sqrt{3}\sin 2x-1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\,4\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{11\pi}{3}$.

17. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos x=\sin 2x-1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\,-\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2};\ -\frac{3\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{4}$.

18. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos x=\sin 2x-1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\,\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}$.

19. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos x=\sin 2x-1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};\,-4\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{2};\ -\frac{16\pi}{3};\ -\frac{14\pi}{3};\ -\frac{9\pi}{2}$.

20. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin x=\sin 2x+1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi m,\ n,\ k,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4};\ 2\pi;\ 3\pi$.

21. а) Решите уравнение

$$\sqrt{3}\sin x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin 2x+1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ n,\ k,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-3\pi;\ -2\pi;\ -\frac{5\pi}{3}$.

22. а) Решите уравнение

$$\sqrt{6}\sin x+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x-\sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi m,\ n,\ k,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-3\pi;\ -\frac{11\pi}{4};\ -\frac{9\pi}{4};\ -2\pi$.

23. а) Решите уравнение

$$\sqrt{6}\cos x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=\sin 2x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{4};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2}$.

24. а) Решите уравнение

$$\sqrt{6}\sin^2 x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ n,\ k,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $3\pi;\ 4\pi;\ \frac{17\pi}{4}$.

25. а) Решите уравнение

$$2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi m, n,\ k,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi;\ -\pi;\ -\frac{5\pi}{6}$.

26. а) Решите уравнение

$$2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2\cos^2 x=\sqrt{6}\cos x+2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) πn; $\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi m, n,\ k,\ m\in\mathbb{Z}$; б) -3π; -2π; $-\frac{7\pi}{4}$.

27. а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{15\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{13\pi}{4}$; $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{2}$.

28. а) Решите уравнение

$$4\cos^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin x=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Ответ: а) πn; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6}$; -3π; $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{13\pi}{6}$; -2π.

29. а) Решите уравнение

$$2\sin^3\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+\cos x=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{15\pi}{4}$.

30. а) Решите уравнение

$$2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2 x=3\sin x+2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$.

31. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2 x=\sin x+2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$.

32. а) Решите уравнение

$$2\cos x+\sin^2 x=2\cos^3 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$.

Ответ: а) πn; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) -4π; $-\frac{10\pi}{3}$; -3π.

33. а) Решите уравнение

$$2\sin x-\sqrt{2}\cos^2 x=2\sin^3 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ:

34. Решите уравнение

$$x-5\sqrt{x-2}+2=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\sqrt{10};\ \sqrt{326}\right]$.

Ответ: а) 3; 18; б) 18.

Глава 2

Образцы заданий 2017 года

1. а) Решите уравнение

$$8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2;\ \log_5 20]$.

Решение. а) Запишем уравнение в виде

$$2^{3x} - 18 \cdot 2^x + \frac{32}{2^x} = 0$$

и умножим обе части уравнения на $2^x > 0$, получим:

$$2^{4x} - 18 \cdot 2^{2x} + 32 = 0 \iff \left(2^{2x} - 2\right) \cdot \left(2^{2x} - 16\right) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} 2^{2x} - 2 = 0 \\ 2^{2x} - 16 = 0 \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 2^{2x} = 2^1 \\ 2^{2x} = 2^4 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

б) Так как $\log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \dfrac{1}{2} < \log_5 20 < \log_5 25 = 2$, то указанному промежутку принадлежит корень $x = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{2}$; 2; б) $\dfrac{1}{2}$.

Комментарий.

А. При решении показательных уравнений совокупности мы учли равносильный переход

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x),$$

который верен ввиду монотонности показательной функции $y = a^x$.

Б. При решении уравнения $2^{4x} - 18 \cdot 2^{2x} + 32 = 0$ можно сделать замену переменной $2^{2x} = t$. Получим квадратное уравнение $t^2 - 18t + 32 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = 2$, $t_2 = 16$. Далее необходимо сделать обратную замену.

2. а) Решите уравнение $\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\, 4\pi\right]$.

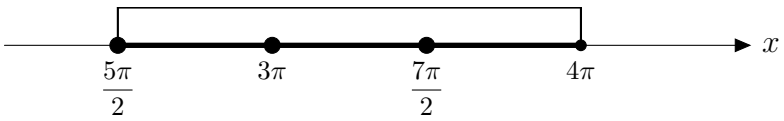
Решение. а) Так как $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$, то имеем:

$$(-\cos x)^2 - (-\cos x) = 0 \iff \cos^2 x + \cos x = 0 \iff \cos x\,(\cos x + 1) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. .$$

б) С помощью числовой прямой находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{5\pi}{2},\ x = 3\pi,\ x = \frac{7\pi}{2}.$$

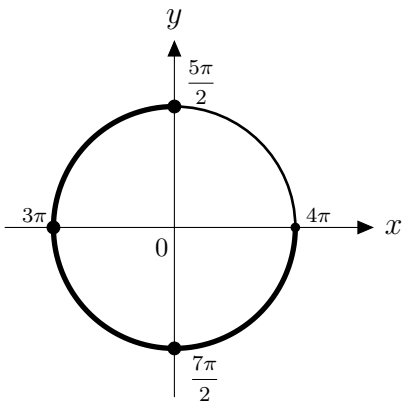


Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{5\pi}{2};\ 3\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}$.

Комментарий.

А. Отбор корней можно сделать, используя окружность. Для этого отметим на единичной окружности точки $\dfrac{5\pi}{2}$ и 4π и выделим часть дуги, на которой требуется найти корни. Указанной дуге окружности принадлежат три корня:

$$x = \frac{5\pi}{2},\ x = 3\pi,\ x = \frac{7\pi}{2}.$$



Б. Отбор корней можно сделать, используя двойные неравенства.

Решив неравенство

$$\frac{5\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi n \leqslant 4\pi \iff \frac{5}{2} \leqslant \frac{1}{2} + n \leqslant 4 \iff 2 \leqslant n \leqslant \frac{7}{2} \iff n \in \{2;\, 3\},$$

находим корни

$$x = \frac{5\pi}{2},\ x = \frac{7\pi}{2}.$$

Решив неравенство

$$\frac{5\pi}{2} \leqslant \pi + 2\pi k \leqslant 4\pi \iff \frac{5}{2} \leqslant 1 + 2k \leqslant 4 \iff \frac{3}{4} \leqslant k \leqslant \frac{3}{2} \iff k = 1,$$

находим корень $x = 3\pi$.

В. Использовать двойные неравенства удобно, в случае если серий решений у уравнения немного. Тригонометрический круг удобен, когда длина отрезка, на котором ищутся корни, не превышает полного оборота, то есть 2π.

3. а) Решите уравнение

$$\log_4(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x) = x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Согласно равносильному переходу $\log_a f(x) = g(x) \iff f(x) = a^{g(x)}$, имеем:

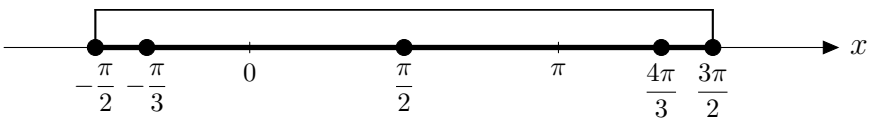
$$\log_4(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x) = x \iff 2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x = 4^x \iff$$

$$\iff -\sqrt{3}\cos x - \sin 2x = 0 \iff 2\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos x = 0 \iff$$

$$\iff \cos x\left(2\sin x + \sqrt{3}\right) = 0 \iff \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}\end{array}\right. .$$

б) С помощью числовой прямой находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{\pi}{2},\ x = -\frac{\pi}{3},\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{4\pi}{3},\ x = \frac{3\pi}{2}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi m,\ n,\ k,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{4\pi}{3};\ \frac{3\pi}{2}$.

Комментарий.

При решении исходного уравнения мы не написали явно ОДЗ: $2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x > 0$, так как из уравнения $2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x = 4^x$ оно следует автоматически (правая часть положительна).

4. а) Решите уравнение

$$25^{\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos(\pi+x)}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

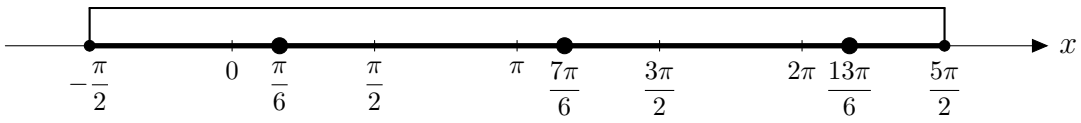
Решение. а) Так как $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \sin x$, $\cos(\pi+x) = -\cos x$, то имеем:

$$25^{\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos(\pi+x)} \iff 5^{2\sqrt{3}\sin x} = 5^{2\cos x} \iff 2\sqrt{3}\sin x = 2\cos x \iff$$

$$\iff \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой прямой находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{7\pi}{6},\ x = \frac{13\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}$.

Комментарий.

Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$ называется *однородным тригонометрическим уравнением первой степени.* Для такого уравнения, очевидно, $\cos x \neq 0$ иначе $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Поделив обе части уравнения на $\cos x \neq 0$, получим равносильное уравнение $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$.

5. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;\ -2\pi]$.

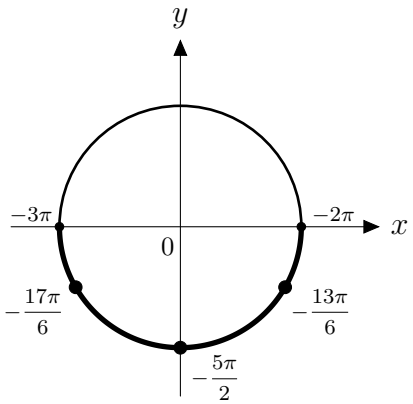
Решение. а) Имеем:

$$9^{-2\cos x} = 9^{2\sin 2x} \iff -2\cos x = 2\sin 2x \iff 4\sin x\cos x + 2\cos x = 0 \iff$$

$$2\cos x(2\sin x + 1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}\end{array}\right. .$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{5\pi}{2},\ x = -\frac{13\pi}{6},\ x = -\frac{17\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$; $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi m$, n, k, $m \in \mathbb{Z}$ б) $-\dfrac{5\pi}{2}$; $-\dfrac{13\pi}{6}$; $-\dfrac{17\pi}{6}$.

6. а) Решите уравнение

$$\frac{9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{2}\sin x}}{\sqrt{11\sin x}} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2};\ 5\pi\right]$.

Решение. а) Данное уравнение равносильно системе:

$$\left\{\begin{array}{l}9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{2}\sin x} = 0\\ \sin x > 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}9^{\sin 2x} = 9^{\sqrt{2}\sin x}\\ \sin x > 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}2\sin x\cos x = \sqrt{2}\sin x\\ \sin x > 0\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}2\cos x = \sqrt{2}\\ \sin x > 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\\ \sin x > 0\end{array}\right. \iff x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) Решив двойное неравенство

$$\frac{7\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant 5\pi \iff \frac{13}{8} \leqslant n \leqslant \frac{19}{8} \iff n = 2,$$

находим корень, принадлежащий заданному промежутку: $x = \dfrac{17\pi}{4}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{17\pi}{4}$.

Комментарий.

При решении уравнения $2\sin x \cos x = \sqrt{2}\sin x$ мы поделили обе части на $\sin x$. Такое деление возможно, поскольку в нашем случае $\sin x > 0$.

7. а) Решите уравнение

$$\log_8(7\sqrt{3}\sin x - \cos 2x - 10) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\, 3\pi\right]$.

Решение. а) Согласно равносильному переходу $\log_a f(x) = g(x) \iff f(x) = a^{g(x)}$, имеем:

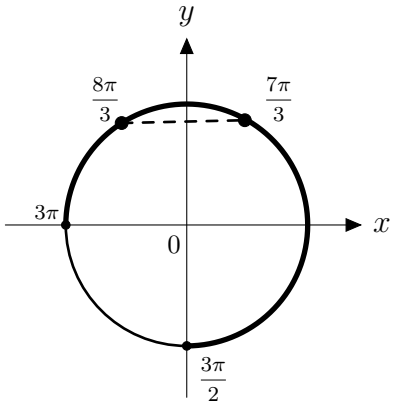
$$\log_8(7\sqrt{3}\sin x - \cos 2x - 10) = 0 \iff 7\sqrt{3}\sin x - \cos 2x - 10 = 1 \iff$$

$$\iff 2\sin^2 x + 7\sqrt{3}\sin x - 12 = 0 \iff \left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\left(\sin x + 4\sqrt{3}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -4\sqrt{3} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.\!\!.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{7\pi}{3},\ x = \frac{8\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{7\pi}{3}$; $\dfrac{8\pi}{3}$.

Комментарий.

А. При решении исходного уравнения мы не написали явно ОДЗ: $7\sqrt{3}\sin x - \cos 2x - 10 > 0$, так как из уравнения $7\sqrt{3}\sin x - \cos 2x - 10 = 1$ оно следует автоматически (правая часть положительна).

Б. При решении задачи мы воспользовались формулой $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Важно знать все три формулы для косинуса двойного угла:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

В. Уравнение $\sin x = -4\sqrt{3}$ не имеет действительных корней, так как $-4\sqrt{3} < -1$.

8. а) Решите уравнение

$$4 \cdot 4^{2\sin x} - 9 \cdot 4^{\sin x} + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\, 4\pi\right]$.

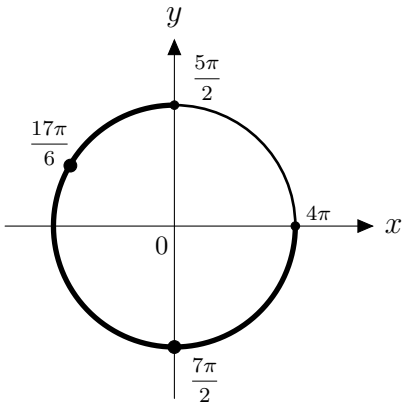
Решение. а) Раскладывая левую часть уравнения на множители, получим:

$$4 \cdot 4^{2\sin x} - 9 \cdot 4^{\sin x} + 2 = 0 \iff \left(4 \cdot 4^{\sin x} - 1\right)\left(4^{\sin x} - 2\right) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} 4^{\sin x} = 4^{-1} \\ 4^{\sin x} = 2 \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 4^{\sin x} = 4^{-1} \\ 2^{2\sin x} = 2^1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z} \end{array}\right. .$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{7\pi}{2},\ x = \frac{17\pi}{6}.$$



Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ n,\ k,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{7\pi}{2};\ \dfrac{17\pi}{6}$.

Комментарий.

А. При решении уравнения можно сделать замену переменной $4^{\sin x} = t$. Получим квадратное уравнение $4t^2 - 9t + 2 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = \dfrac{1}{4}$, $t_2 = 2$. Далее необходимо сделать обратную замену.

9. а) Решите уравнение

$$6\log_8^2(\cos x) - 5\log_8(\cos x) - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\, 4\pi\right]$.

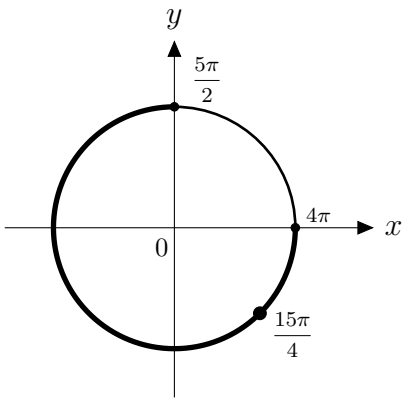
Решение. а) Раскладывая левую часть уравнения на множители, получим:

$$6\log_8^2(\cos x) - 5\log_8(\cos x) - 1 = 0 \iff (6\log_8(\cos x) + 1)\,(\log_8(\cos x) - 1) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \log_8(\cos x) = -\dfrac{1}{6} \\ \log_8(\cos x) = 1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x = 8 \end{array}\right. \iff x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{15\pi}{4}.$$



Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{15\pi}{4}$.

Комментарий.

А. При решении уравнения можно сделать замену переменной $\log_8(\cos x) = t$. Получим квадратное уравнение $6t^2 - 5t - 1 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = -\dfrac{1}{6}$, $t_2 = 1$. Далее необходимо сделать обратную замену.

Б. Уравнение $\log_a f(x) = b \iff f(x) = a^b$.

В. $8^{-\frac{1}{6}} = 2^{-\frac{3}{6}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Г. Уравнение $\cos x = 8$ не имеет действительных корней, так как $8 > 1$.

10. а) Решите уравнение

$$16^{\sin x} + 16^{\sin(x+\pi)} = \frac{17}{4}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\, 2\pi\right]$.

Решение. а) Так как по формулам приведения $\sin(\pi + x) = -\sin x$, то имеем:

$$16^{\sin x} + 16^{-\sin x} = \frac{17}{4} \iff 16^{\sin x} + \frac{1}{16^{\sin x}} = \frac{17}{4} \iff 4 \cdot 16^{2\sin x} - 17 \cdot 16^{\sin x} + 4 = 0 \iff$$

$$\iff \left(4 \cdot 16^{\sin x} - 1\right)\left(16^{\sin x} - 4\right) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} 16^{\sin x} = \frac{1}{4} \\ 16^{\sin x} = 4 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 4^{2\sin x} = 4^{-1} \\ 4^{2\sin x} = 4^{1} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \sin x = \pm\frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) Решив двойные неравенства

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{6} + \pi n \leqslant 2\pi \qquad \text{и} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{6} + \pi k \leqslant 2\pi,$$

находим $n \in \{0;\, 1,\, 2\}$, $k \in \{0;\, 1\}$, откуда

$$x = -\frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{5\pi}{6},\ x = \frac{7\pi}{6},\ x = \frac{11\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6}$.

Комментарий.

А. При решении уравнения $16^{2\sin x} - 17 \cdot 16^{\sin x} + 4 = 0$ можно сделать замену переменной $16^{\sin x} = t$. Получим квадратное уравнение $4t^2 - 17t + 4 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = 4$. Далее необходимо сделать обратную замену.

Б. При решении уравнений $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ мы объединили четыре серии решения в две. Это сделано для более простого отбора корней.

11. а) Решите уравнение

$$\log_3\left(x^2 - 24x\right) = 4.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_2 0.1;\, 12\sqrt{5}\right]$.

Решение. а) Согласно равносильному переходу $\log_a f(x) = b \iff f(x) = a^b$, имеем:

$$\log_3\left(x^2 - 24x\right) = 4 \iff x^2 - 24x = 81 \iff x^2 - 24x - 81 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 27 \end{array}\right.$$

б) Так как $\log_2 0.1 = -\log_2 10 < -\log_2 8 = -3 < 12\sqrt{5} = \sqrt{720} < \sqrt{729} = 27$, то заданному отрезку принадлежит корень $x = -3$.

Ответ: а) -3; 27; б) -3.

12. а) Решите уравнение

$$2x\cos x - 8\cos x + x - 4 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\, \pi\right]$.

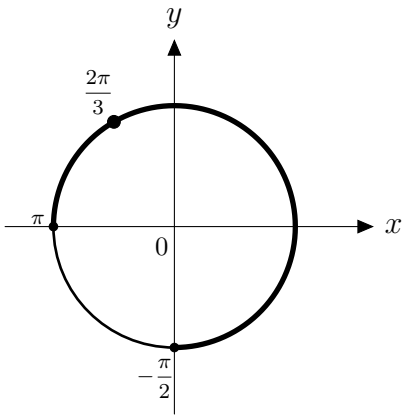
Решение. а) Раскладывая левую часть уравнения на множители, получим:

$$2x\cos x - 8\cos x + x - 4 = 0 \iff 2\cos x \cdot (x-4) + x - 4 = 0 \iff$$

$$\iff (x-4)(2\cos x + 1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности находим корень, принадлежащий заданному отрезку:

$$x = \frac{2\pi}{3}.$$



Ответ: а) 4; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3}$.

Комментарий.

А. Функция $y = \arccos x$ – ни четная, ни нечетная. Для отрицательного значения аргумента имеем

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Б. Число $x = 4$ не принадлежит указанному промежутку, так как $4 > \pi \approx 3.1415\ldots$.

13. а) Решите уравнение

$$\log_2^2 x^2 - 16\log_2(2x) + 31 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [3; 6].

Решение. а) Так как $x > 0$, то $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$, $\log_2(2x) = 1 + \log_2 x$. Имеем:

$$(2\log_2 x)^2 - 16\,(1 + \log_2 x) + 31 = 0 \iff 4\log_2^2 x - 16\log_2 x + 15 = 0 \iff$$

$$\iff (2\log_2 x - 3)\,(2\log_2 x - 5) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \log_2 x = \dfrac{3}{2} \\ \log_2 x = \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{3}{2}} \\ x = 2^{\frac{5}{2}} \end{array}\right. .$$

б) Так как $\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 8 < 3^2 = 9$, $\left(2^{\frac{5}{2}}\right)^2 = 32 < 6^2 = 36$, то заданному отрезку принадлежит корень

$$x = 2^{\frac{5}{2}}.$$

Ответ: а) $2^{\frac{3}{2}}$; $2^{\frac{5}{2}}$; б) $2^{\frac{5}{2}}$.

Комментарий.

А. В общем случае для четного показателя степени верна формула $\log_a x^{2n} = 2n\log_a |x|$. В нашем случае, так как $x > 0$, то $|x| = x$.

Б. При решении уравнения $4\log_2^2 x - 16\log_2 x + 15 = 0$ можно сделать замену переменной $\log_2 x = t$. Получим квадратное уравнение $4t^2 - 16t + 15 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = \dfrac{3}{2}$, $t_2 = \dfrac{5}{2}$. Далее необходимо сделать обратную замену.

Задачи для самостоятельного решения

14. а) Решите уравнение

$$27^x - 4 \cdot 3^{x+2} + 3^{5-x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_7 4;\ \log_7 16]$.

Ответ: а) $1;\ \frac{3}{2}$; б) $\frac{3}{2}$.

15. а) Решите уравнение

$$27^x - 28 \cdot 3^{x+1} + 3^{5-x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3};\ \log_2 5]$.

Ответ: а) $\frac{1}{2};\ 2$; б) 2.

16. а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi - x) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ n,\ k,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6};\ 3\pi;\ 4\pi$.

17. а) Решите уравнение $\sin^3\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos^2(\pi - x) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi$.

18. а) Решите уравнение

$$\log_9(3^{2x} + 5\sqrt{2}\sin x - 6\cos^2 x - 2) = x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{4}$.

19. а) Решите уравнение

$$\log_4(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - 6\sin^2 x) = x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6};\ \frac{19\pi}{6}$.

20. а) Решите уравнение

$$3^{2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\,-2\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$.

21. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin(x+\pi)}=2^{2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\,-3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3}$.

22. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\sin(x+\pi)}=7^{2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\,\frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{10\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$.

23. а) Решите уравнение

$$2^{4\sqrt{3}\sin x}=2^{-4\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\,3\pi\right]$.

Ответ: а) πn; $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) π; 2π; 3π; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$.

24. а) Решите уравнение

$$49^{\sin x}=\left(\frac{1}{7}\right)^{-\sqrt{2}\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\,\frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) πn; $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) 2π; 3π; $\frac{9\pi}{4}$.

25. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{125}\right)^{-\cos x}=5^{\sqrt{3}\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\,-\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, n, k, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$.

26. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\cos x}=7^{\sqrt{2}\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $\frac{5\pi}{4}+2\pi m$, n, k, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{2}$.

27. а) Решите уравнение

$$7^{2\cos x}=49^{\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, n, k, $m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$.

28. а) Решите уравнение

$$\frac{4^{\sin 2x}-2^{2\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{7\sin x}}=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2};\ -5\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{35\pi}{6}$.

29. а) Решите уравнение

$$\log_{13}(\cos 2x-9\sqrt{2}\cos x-8)=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}$.

30. а) Решите уравнение

$$\log_7(2\cos^2 x+3\cos x-1)=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$.

31. а) Решите уравнение

$$\log_3\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin 2x+81\right)=4.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Ответ: а) πn; $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) -3π; -2π; $-\frac{13\pi}{4}$; $-\frac{11\pi}{4}$.

32. а) Решите уравнение

$$81^{\cos x}-12\cdot 9^{\cos x}+27=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\, -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi n$; $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, $n,\, k\in\mathbb{Z}$; б) -4π; $-\dfrac{11\pi}{3}$.

33. а) Решите уравнение

$$9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\, 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi+2\pi n$; $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, $n,\, k\in\mathbb{Z}$; б) 3π; $\dfrac{11\pi}{3}$.

34. а) Решите уравнение

$$16^{\sin x}-6\cdot 4^{\sin x}+8=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\, 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$; $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$; $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m$, $n,\, k,\, m\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{5\pi}{2}$; $\dfrac{17\pi}{6}$.

35. а) Решите уравнение

$$8\cdot 16^{\cos x}-6\cdot 4^{\cos x}+1=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\, 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi+2\pi n$; $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$, $n,\, k\in\mathbb{Z}$; б) 3π; $\dfrac{8\pi}{3}$.

36. а) Решите уравнение

$$27\cdot 81^{\sin x}-12\cdot 9^{\sin x}+1=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\, 3\pi\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$; $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$; $\dfrac{7\pi}{6}+2\pi m$, $n,\, k,\, m\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{3\pi}{2}$; $\dfrac{11\pi}{6}$.

37. а) Решите уравнение

$$4\log_9^2(2\sin x)-5\log_9(2\sin x)+1=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\, \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$; $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$, $n,\, k\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{7\pi}{3}$; $\dfrac{8\pi}{3}$.

38. а) Решите уравнение

$$3\log_8^2(\sin x)-5\log_8(\sin x)-2=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\, -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6}$.

39. а) Решите уравнение

$$2\log_2^2(\sin x)-5\log_2(\sin x)-3=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\,-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4}$.

40. а) Решите уравнение

$$2\log_3^2(2\cos x)-7\log_3(2\cos x)+3=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\,-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{6}$; $-\frac{11\pi}{6}$.

41. а) Решите уравнение

$$2\log_2^2(2\cos x)-9\log_2(2\cos x)+4=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\,-\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4}$.

42. а) Решите уравнение

$$2\log_3^2(2\cos x)-5\log_3(2\cos x)+2=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\,\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$.

43. а) Решите уравнение

$$2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\,0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

44. а) Решите уравнение

$$16^{\cos x}+16^{\cos(\pi-x)}=\frac{17}{4}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}$.

45. а) Решите уравнение

$$9^{\sin x}+9^{\sin(\pi+x)}=\frac{10}{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6};\ -\frac{17\pi}{6};\ -\frac{13\pi}{6}$.

46. а) Решите уравнение

$$4^{\sin x}+4^{\sin(\pi+x)}=\frac{5}{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6};\ \frac{19\pi}{6};\ \frac{23\pi}{6}$.

47. а) Решите уравнение

$$0.4^{\sin x}+2.5^{\sin x}=2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) πn, $n\in\mathbb{Z}$; б) $2\pi;\ 3\pi$.

48. а) Решите уравнение

$$\log_2\left(x^2-14x\right)=5.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_3 0.1;\ 5\sqrt{10}\right]$.

Ответ: а) $-2;\ 16$; б) -2.

49. а) Решите уравнение

$$\log_3\left(x^2-2x\right)=1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 0.2;\ \log_2 5]$.

Ответ: а) $-1;\ 3$; б) -1.

50. а) Решите уравнение

$$2x\sin x-6\sin x+3\sqrt{3}-\sqrt{3}x=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

Ответ: а) $3;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ 3$.

51. а) Решите уравнение

$$2x\cos 2x - 14\cos 2x - x + 7 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\, 4\pi\right]$.

Ответ: а) 7; $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{17\pi}{6}$; $\dfrac{19\pi}{6}$; $\dfrac{23\pi}{6}$.

52. а) Решите уравнение

$$\log_4^2 x^2 - 16\log_4(4x) + 23 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[8;\, 256]$.

Ответ: а) 2; 128; б) 128.

53. а) Решите уравнение

$$\log_3^2 x^3 - 3\log_3(9x^3) + 8 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;\, 3]$.

Ответ: а) $3^{\frac{1}{3}}$; $3^{\frac{2}{3}}$; б) $3^{\frac{2}{3}}$.

Глава 3

Образцы заданий 2016 года

1. а) Решите уравнение

$$8^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1.5;\, 3]$.

Решение. а) Имеем:

$$8^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0 \iff 2^x(4^x - 1) - 3(4^x - 1) = 0 \iff$$

$$(4^x - 1)(2^x - 3) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} 4^x - 1 = 0 \\ 2^x - 3 = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_2 3 \end{array}\right.$$

б) Так как $1.5 = \log_2 2^{1.5} = \log_2 \sqrt{8} < \log_2 \sqrt{9} = \log_2 3 < \log_2 8 = 3$, то указанному отрезку принадлежит корень $x = \log_2 3$.

Ответ: а) 0; $\log_2 3$; б) $\log_2 3$.

2. а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.75.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\, \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Так как $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ и $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, то имеем:

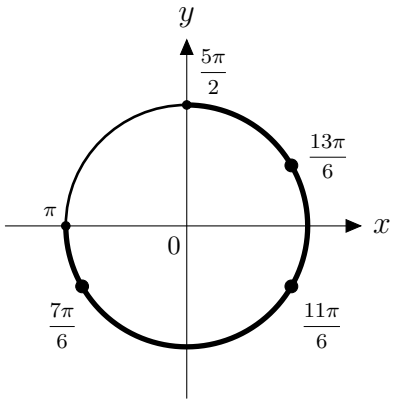
$$\cos 2x + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.75 \iff \cos 2x + \sin^2 x = 0.75 \iff \cos 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\iff \cos 2x = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие указанному отрезку:

$$x = \frac{7\pi}{6},\ x = \frac{11\pi}{6},\ x = \frac{13\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{7\pi}{6};\ \dfrac{11\pi}{6};\ \dfrac{13\pi}{6}$.



3. а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

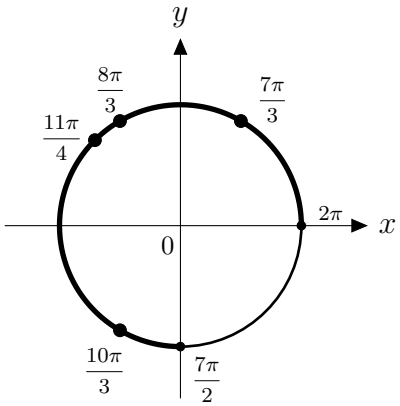
Решение. а) Имеем:

$$\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x + 1) - 3(\operatorname{tg} x + 1) = 0 \iff (\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{7\pi}{3},\ x = \frac{8\pi}{3},\ x = \frac{11\pi}{4},\ x = \frac{10\pi}{3}.$$



Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3};\ \frac{11\pi}{4};\ \frac{10\pi}{3}$.

4. а) Решите уравнение

$$2\log_2^2(2\sin x) - 7\log_2(2\sin x) + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\, 2\pi\right]$.

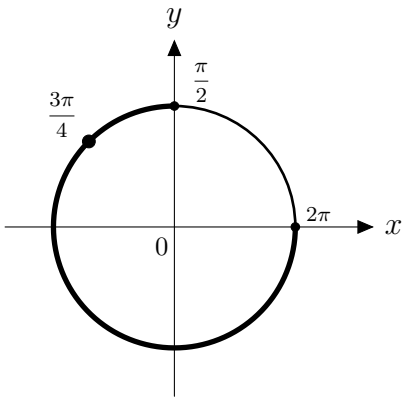
Решение. а) Имеем:

$$2\log_2^2(2\sin x) - 7\log_2(2\sin x) + 3 = 0 \iff (2\log_2(2\sin x) - 1)(\log_2(2\sin x) - 3) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \log_2(2\sin x) = \frac{1}{2} \\ \log_2(2\sin x) = 3 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = 4 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{3\pi}{4}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}$.

5. а) Решите уравнение

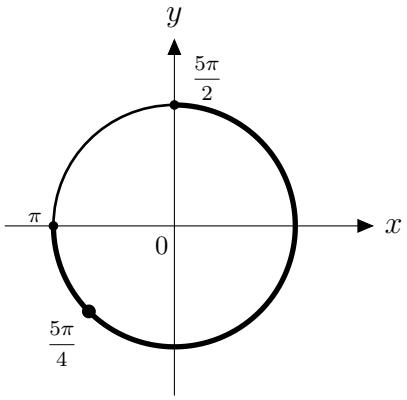
$$2\sin^2 x = 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Так как $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то имеем:

$$2(1 - \cos^2 x) = 3\sqrt{2}\cos x + 4 \iff 2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = -\sqrt{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\iff x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности находим корень, принадлежащий заданному отрезку:

$$x = \frac{5\pi}{4}.$$

Ответ: а) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4}$.

6. а) Решите уравнение

$$2\cos 2x = 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\, -\pi\right]$.

Решение. а) Так как $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, то имеем:

$$2(2\cos^2 x - 1) = 4\cos x + 1 \iff 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{3}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\iff x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корень, принадлежащий заданному отрезку:

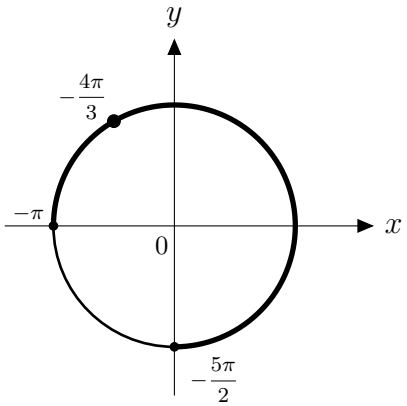
$$x = -\frac{4\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3}$.

7. а) Решите уравнение

$$2^{4\cos x} + 3 \cdot 2^{2\cos x} - 10 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\, \frac{5\pi}{2}\right]$.

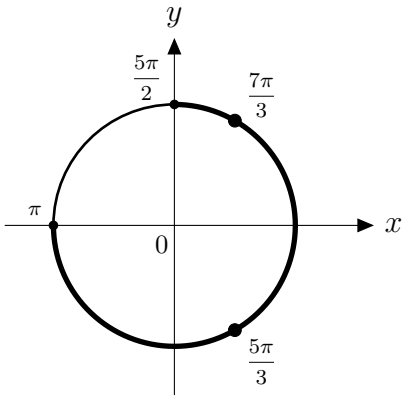


Решение. а) Раскладывая квадратное относительно $t = 2^{2\cos x}$ уравнение на множители, получим:

$$\left(2^{2\cos x}+5\right)\left(2^{2\cos x}-2\right)=0 \iff \left[\begin{array}{l} 2^{2\cos x}=-5 \\ 2^{2\cos x}=2 \end{array}\right. \iff \cos x=\frac{1}{2} \iff x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x=\frac{5\pi}{3},\ x=\frac{7\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}$.

8. а) Решите уравнение

$$\sin 2x+2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

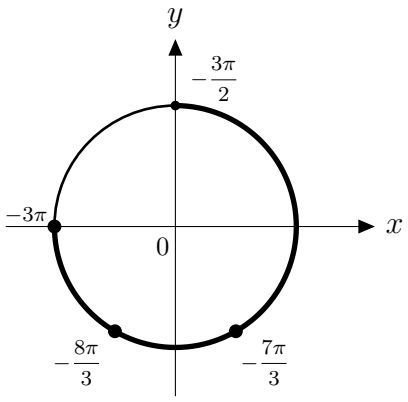
Решение. а) Так как $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, $\sin 2x=2\sin x\cos x$, то имеем:

$$2\sin x\cos x+2\sin x=\sqrt{3}(\cos x+1) \iff (\cos x+1)(2\sin x+\sqrt{3})=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right. .$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x=-3\pi,\ x=-\frac{7\pi}{3},\ x=-\frac{8\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pi+2\pi n$; $\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, n, k, $m\in\mathbb{Z}$; б) -3π; $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$.

9. а) Решите уравнение

$$2\log_9^2 x-3\log_9 x+1=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\sqrt{10};\ \sqrt{99}\right]$.

Решение. а) Раскладывая квадратное относительно $t=\log_9 x$ уравнение на множители, получим:

$$(2\log_9 x-1)(\log_9 x-1)=0 \iff \left[\begin{array}{l}\log_9 x=\dfrac{1}{2}\\ \log_9 x=1\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=9^{\frac{1}{2}}=3\\ x=9^1=9\end{array}\right. .$$

б) Так как $3=\sqrt{9}<\sqrt{10}$ и $\sqrt{10}<\sqrt{81}=9<\sqrt{99}$, то указанному отрезку принадлежит корень $x=9$.

Ответ: а) 3; 9; б) 9.

Задачи для самостоятельного решения

10. а) Решите уравнение

$$8^x - 7 \cdot 4^x - 2^{x+4} + 112 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 5;\, \log_2 11]$.

Ответ: а) 2; $\log_2 7$; б) $\log_2 7$.

11. а) Решите уравнение

$$27^x - 5 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 4;\, \log_3 10]$.

Ответ: а) 1; $\log_3 5$; б) $\log_3 5$.

12. а) Решите уравнение

$$27^x - 2 \cdot 9^x - 3^x + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0.5;\, 2]$.

Ответ: а) 0; $\log_3 2$; б) $\log_3 2$.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x + \cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = 0.25$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\, -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{11\pi}{3}$; $-\dfrac{10\pi}{3}$; $-\dfrac{8\pi}{3}$.

14. а) Решите уравнение $\cos 2x + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 0.5$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\, -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{13\pi}{4}$; $-\dfrac{11\pi}{4}$; $-\dfrac{9\pi}{4}$.

15. а) Решите уравнение $\cos 2x + 0.75 = \cos^2 x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\, -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{11\pi}{3}$; $-\dfrac{10\pi}{3}$; $-\dfrac{8\pi}{3}$.

16. а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\, 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{5\pi}{3}$; $\dfrac{9\pi}{4}$; $\dfrac{7\pi}{3}$; $\dfrac{8\pi}{3}$.

17. а) Решите уравнение

$$2\log_4^2(4\cos x) - 7\log_4(4\cos x) + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\, 2\pi\right]$.

Ответ: а) $2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}$; 2π.

18. а) Решите уравнение

$$2\log_3^2(2\cos x) - 5\log_3(2\cos x) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$.

19. а) Решите уравнение

$$2\cos^2 x + 1 = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\, 4\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$; $\frac{15\pi}{4}$.

20. а) Решите уравнение

$$2\sin^2 x + 4 = 3\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\, -\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

21. а) Решите уравнение

$$8\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 9.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\, -\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$.

22. а) Решите уравнение

$$8\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 9.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\,-\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{6};\,-\frac{11\pi}{6}$.

23. а) Решите уравнение

$$2\cos 2x+4\sin x+1=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\,4\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{19\pi}{6};\,\frac{23\pi}{6}$.

24. а) Решите уравнение

$$3\cos 2x-5\sin x+1=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\,\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

25. а) Решите уравнение

$$\cos 2x+2=\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\,-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3};\,-\frac{7\pi}{3}$.

26. а) Решите уравнение

$$3\cos 2x+11\sin x+4=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\,-2\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6};\,-\frac{13\pi}{6}$.

27. а) Решите уравнение

$$2^{4\sin x}+3\cdot 2^{2\sin x}-10=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\,\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

28. а) Решите уравнение $3^{4\cos x}-4\cdot 3^{2\cos x}+3=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2};\,-\frac{\pi}{3};\,\frac{\pi}{3};\,\frac{\pi}{2};\,\frac{3\pi}{2}$.

29. а) Решите уравнение

$$\sin 2x = 2\sin x + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\, -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi n$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi m$, n, k, $m \in \mathbb{Z}$; б) -4π; $-\frac{17\pi}{6}$.

30. а) Решите уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sqrt{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

31. а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \sin x - 2\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\, 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$.

32. а) Решите уравнение

$$6\log_8^2 x - 5\log_8 x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;\, 2.5]$.

Ответ: а) 2; $\sqrt{8}$; б) 2.

33. а) Решите уравнение

$$3\log_8^2 x - 4\log_8 x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\sqrt{5};\, \sqrt{65}\right]$.

Ответ: а) 2; 8; б) 8.

Глава 4

Образцы заданий 2015 года

1. Решите уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 2\cos x + \sqrt{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Так как $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, то имеем:

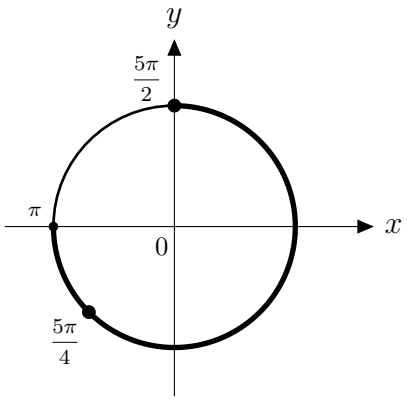
$$2\sin x\cos x + \sqrt{2}\sin x = 2\cos x + \sqrt{2} \iff \sqrt{2}\sin x\left(\sqrt{2}\cos x + 1\right) - \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\cos x + 1\right) = 0$$

$$\iff \left(\sqrt{2}\cos x + 1\right)\left(\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\right) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{5\pi}{4},\ x = \frac{5\pi}{2}.$$



Ответ: а) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4};\ \frac{5\pi}{2}$.

2. Решите уравнение

$$2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

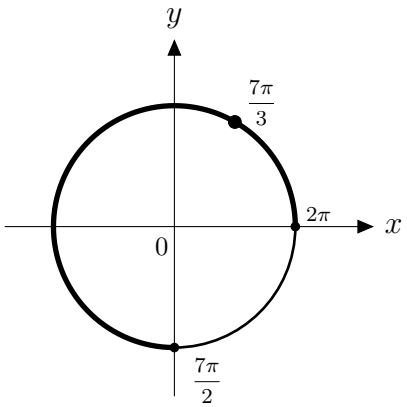
Решение. а) Имеем:

$$2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0 \iff \cos^2 x(2\cos x - 1) + 2\cos x - 1 = 0 \iff$$

$$\iff (2\cos x - 1)(\cos^2 x + 1) = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корень, принадлежащий заданному отрезку:

$$x = \frac{7\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}$.

3. Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \sqrt{3}.$$

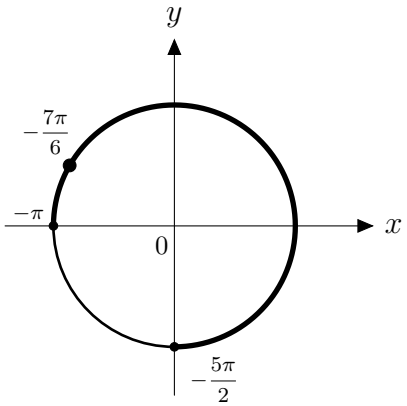
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

Решение. а) Так как $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ и $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, то имеем:

$$\frac{2\sin x\cos x}{-\sin x} = \sqrt{3} \iff \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корень, принадлежащий заданному отрезку:

$$x = -\frac{7\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{6}$.

4. Решите уравнение

$$2\cos 2x+4\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+1=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

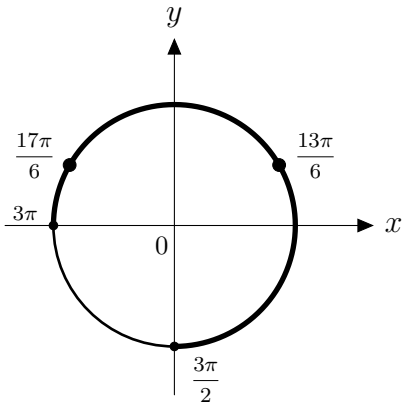
Решение. а) Так как $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$ и $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, то имеем:

$$2(1-2\sin^2 x)-4\sin x+1=0 \iff 4\sin^2 x+4\sin x-3=0 \iff$$

$$\iff (2\sin x+3)(2\sin x-1)=0 \iff \left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{3}{2}\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right..$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x=\frac{13\pi}{6},\ x=\frac{17\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n;\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{13\pi}{6};\ \dfrac{17\pi}{6}$.

5. Решите уравнение

$$4\sin^2 x = \operatorname{tg} x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi;\, 0]$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной x задается условием $\cos x \neq 0$, то есть $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Имеем:

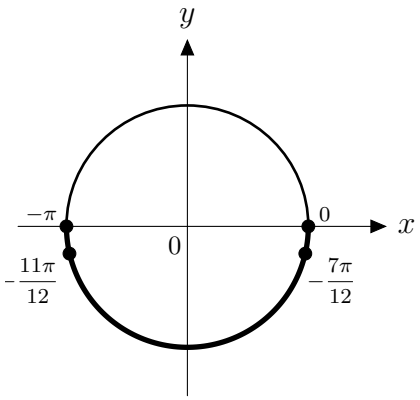
$$4\sin^2 x = \operatorname{tg} x \iff 4\sin^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Longrightarrow 4\sin^2 x \cdot \cos x - \sin x = 0 \iff$$

$$\iff \sin x(4\sin x\cos x - 1) = 0 \iff \sin x(2\sin 2x - 1) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z} \end{array}\right. .$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\pi,\ x = -\frac{11\pi}{12},\ x = -\frac{7\pi}{12},\ x = 0.$$



Ответ: а) πn; $\dfrac{\pi}{12} + \pi k$; $\dfrac{5\pi}{12} + \pi m$, n, k, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi$; $-\dfrac{11\pi}{12}$; $-\dfrac{7\pi}{12}$; 0.

6. Решите уравнение

$$16^{\sin x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\, \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

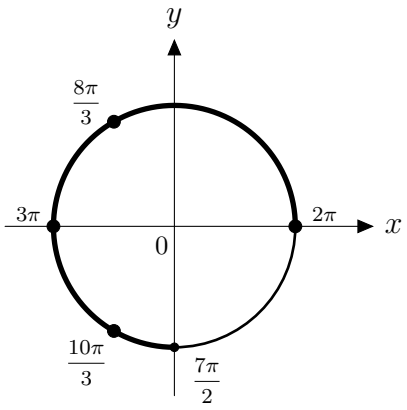
Решение. а) Имеем:

$$16^{\sin x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2\sin 2x} \iff 4^{2\sin x} = 4^{-2\sin 2x} \iff 2\sin x = -2\sin 2x \iff$$

$$\iff \sin x(1 + 2\cos x) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. .$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = 2\pi,\ x = 3\pi,\ x = \frac{8\pi}{3},\ x = \frac{10\pi}{3}.$$



Ответ: а) πn; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) 2π; 3π; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{10\pi}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

7. а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \sin x - 2\cos x + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\, 3\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{3}$.

8. Решите уравнение

$$2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\, -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$.

9. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin^3 x - \sin^2 x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$.

10. Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = -\sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\, \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, n, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$.

11. а) Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)} = \sqrt{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\, \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $n\, k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{13\pi}{4}$.

12. Решите уравнение

$$3\cos 2x - 5\sin x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

13. Решите уравнение

$$\cos 2x+\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4};\ \frac{11\pi}{4}$.

14. Решите уравнение

$$\cos 2x+2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}$.

15. Решите уравнение

$$2\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+4=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6};\ \frac{19\pi}{6}$.

16. Решите уравнение

$$4\cos^2 x+8\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-5=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{10\pi}{3};\ -\frac{8\pi}{3}$.

17. Решите уравнение

$$8\sin^2 x+2\sqrt{3}\cos x+1=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6};\ -\frac{17\pi}{6}$.

18. Решите уравнение

$$4\sin^2 x=-\sqrt{3}\operatorname{tg} x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi;\ 0]$.

Ответ: а) πn; $-\frac{\pi}{6}+\pi k$; $\frac{2\pi}{3}+\pi m$, n, k, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\pi$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{6}$; 0.

19. Решите уравнение

$$2\cos^2 x=\operatorname{ctg} x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\,2\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{\pi}{4}+\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$.

20. Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x}=9^{2\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\,-\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $\frac{7\pi}{6}+2\pi m$, n, k, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}$.

21. а) Решите уравнение

$$25^{\sin x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{2}\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\,\frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) πn; $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) 2π; $\frac{9\pi}{4}$; 3π.

22. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\sin x}=7^{2\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$.

Ответ: а) πn; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) 2π; $\frac{8\pi}{3}$; 3π.

23. а) Решите уравнение

$$36^{\sin 2x}=6^{2\sin x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\,-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) πn; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) -3π.

Глава 5

Образцы заданий 2014 года

1. а) Решите уравнение

$$9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\, -2\pi\right]$.

Решение. а) Сделаем замену $9^{\sin x} = t$, $t > 0$. Так как $9^{-\sin x} = \frac{1}{9^{\sin x}} = \frac{1}{t}$, то уравнение примет вид:

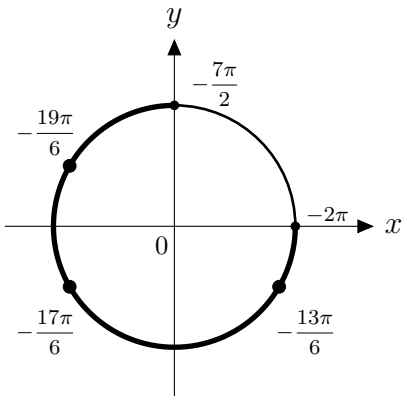
$$t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3} \iff 3t^2 - 10t + 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{3} \\ t = 3 \end{array}\right.\!.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\left[\begin{array}{l} 9^{\sin x} = \frac{1}{3} \\ 9^{\sin x} = 3 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 3^{2\sin x} = 3^{-1} \\ 3^{2\sin x} = 3^{1} \end{array}\right. \iff \sin x = \pm\frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{19\pi}{6},\ x = -\frac{17\pi}{6},\ x = -\frac{13\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{19\pi}{6}$, $-\dfrac{17\pi}{6}$, $-\dfrac{13\pi}{6}$.

2. а) Решите уравнение $\cos x+\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)+1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\,-\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

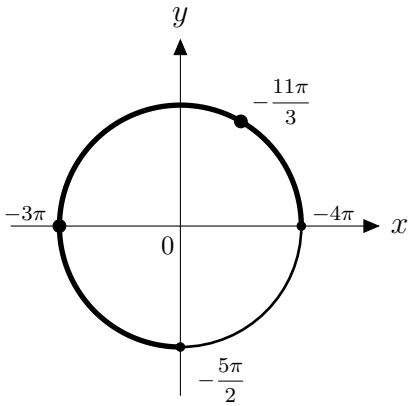
Решение. а) Так как $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)=-\cos\dfrac{x}{2}$, $\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}-1$, то уравнение примет вид:

$$2\cos^2\frac{x}{2}-1-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}+1=0\iff\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)=0\iff\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2}=0\\ \cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\iff$$

$$\iff\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{x}{2}=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right..$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x=-3\pi,\ x=-\frac{11\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pi+\pi n$, $\pm\dfrac{\pi}{3}+4\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) -3π; $-\dfrac{11\pi}{3}$.

3. а) Решите уравнение $2\sqrt{3}\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\,3\pi\right]$.

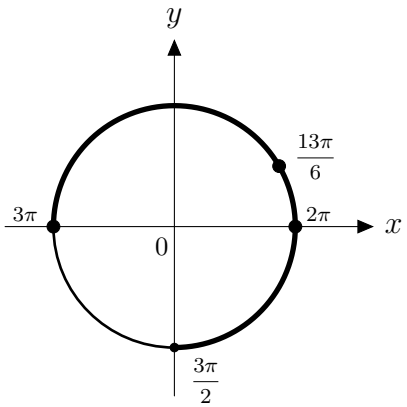
Решение. а) Так как $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$ и $\sin 2x=2\sin x\cos x$, то имеем:

$$2\sqrt{3}\sin^2 x-2\sin x\cos x=0 \iff 2\sin x(\sqrt{3}\sin x-\cos x)=0 \iff \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sqrt{3}\sin x-\cos x=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\!.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x=2\pi,\ x=3\pi,\ x=\frac{13\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\pi n,\ \pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $2\pi;\ 3\pi;\ \dfrac{13\pi}{6}$.

4. а) Решите уравнение $\dfrac{2}{\operatorname{tg}^2 x+1}=\sin 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной x задается условием $\cos x\neq 0$. Так как $1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\sin 2x=2\sin x\cos x$, то уравнение примет вид:

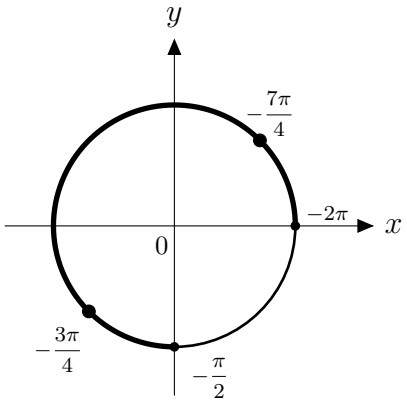
$$2\cos^2 x=2\sin x\cos x \iff \cos x=\sin x \iff \operatorname{tg} x=1 \iff x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x=-\frac{7\pi}{4},\ x=-\frac{3\pi}{4}.$$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{4};\ -\dfrac{3\pi}{4}$.

5. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x+(1+\sqrt{3})\operatorname{tg} x+\sqrt{3}=0$.



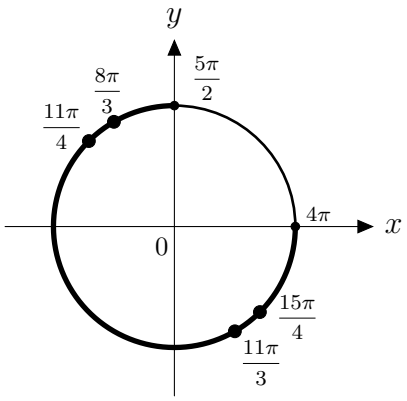
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\, 4\pi\right]$.

Решение. а) Уравнение является квадратным относительно $t = \operatorname{tg} x$. По теореме обратной теореме Виета имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. .$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{8\pi}{3},\ x = \frac{11\pi}{4},\ x = \frac{11\pi}{3},\ x = \frac{15\pi}{4}.$$



Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{3};\ \frac{11\pi}{4};\ \frac{11\pi}{3};\ \frac{15\pi}{4}$.

6. а) Решите уравнение

$$3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^{x+1} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;\, 3]$.

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде

$$3^{2x} - 7 \cdot 6^x + 12 \cdot 2^{2x} = 0$$

и поделим обе части на $2^{2x} \neq 0$. Получим:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x} + 12 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^{x} = 3 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x} = 4 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \log_{\frac{3}{2}} 3 \\ x = \log_{\frac{3}{2}} 4 \end{array}\right.$$

б) Так как $2 = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \log_{\frac{3}{2}} 2.25 < \log_{\frac{3}{2}} 3 < \log_{\frac{3}{2}} 3.375 = 3 < \log_{\frac{3}{2}} 4$, то указанному отрезку принадлежит $x = \log_{\frac{3}{2}} 3$.

Ответ: а) $\log_{\frac{3}{2}} 3$; $\log_{\frac{3}{2}} 4$; б) $\log_{\frac{3}{2}} 3$.

7. а) Решите уравнение $\log_5(2 - x) = \log_{25} x^4$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_8 \frac{1}{82}; \log_9 8\right]$.

Решение. а) Имеем:

$$\log_5(2 - x) = \log_{25} x^4 \iff \log_5(2 - x) = \log_5 x^2 \iff \left\{\begin{array}{l} x \neq 0 \\ 2 - x = x^2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

б) Так как $\log_9 \frac{1}{82} = -\log_9 82 < -\log_9 81 = -2 < \log_9 8 < \log_9 9 = 1$, то указанному отрезку принадлежит корень $x = -2$.

Ответ: а) -2; 1; б) -2.

8. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sin x} + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

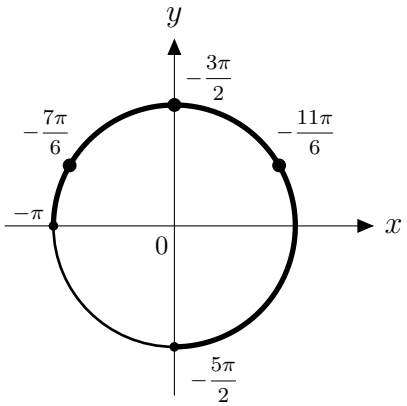
Решение. а) Умножим обе части уравнения на $\sin^2 x \neq 0$, получим:

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{11\pi}{6},\ x = -\frac{3\pi}{2},\ x = -\frac{7\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, n, k, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{6}$.



Задачи для самостоятельного решения

9. а) Решите уравнение

$$4^{\sin x} + 4^{-\sin x} = \frac{5}{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\, 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{19\pi}{6}$; $\frac{23\pi}{6}$.

10. а) Решите уравнение

$$4^{\cos x} + 4^{-\cos x} = \frac{5}{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\, -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{3}$.

11. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x} = 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\, -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$.

12. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{\sin x} + \left(\frac{5}{4}\right)^{\sin x} = 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\, \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) πn, $n \in \mathbb{Z}$; б) 2π; 3π.

13. а) Решите уравнение

$$2\cos x - 8\sin\frac{x}{2} + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 4\pi n;\ \frac{5\pi}{3} + 4\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}$.

14. а) Решите уравнение

$$3\cos x + 7\cos\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 4\pi n;\ -\frac{5\pi}{3} + 4\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$.

15. а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{23\pi}{6};\ -\frac{7\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}$.

16. а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2};\ \frac{11\pi}{4};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{15\pi}{4}$.

17. а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \frac{\pi}{4} + \pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-4\pi;\ -\frac{15\pi}{4};\ -3\pi$.

18. а) Решите уравнение $\frac{2\sqrt{3}}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3};\ -\frac{2\pi}{3}$.

19. а) Решите уравнение $\frac{2\sqrt{3}}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = -\sin 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{6}$.

20. а) Решите уравнение $2\sin^2 x+(\sqrt{2}-10)\sin x-5\sqrt{2}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\,4\pi\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$; $\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{13\pi}{4}$; $\dfrac{15\pi}{4}$.

21. а) Решите уравнение

$$5\cdot 25^{x-\frac{1}{2}}-8\cdot 15^x+15\cdot 9^x=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;\,3]$.

Ответ: а) $\log_{\frac{5}{3}}3$; $\log_{\frac{5}{3}}5$; б) $\log_{\frac{5}{3}}3$.

22. а) Решите уравнение $2\log_3(2-x)=\log_9 x^8$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_{12}\dfrac{1}{145};\,\log_{12}11\right]$.

Ответ: а) -2; 1; б) -2.

23. а) Решите уравнение $\log_4 x^4=\log_2(7x+8)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_2\dfrac{1}{\sqrt{2}};\,\log_2 257\right]$.

Ответ: а) -1; 8; б) 8.

24. а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{3}{\cos x}+2=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\,-\pi\right]$.

Ответ: а) $2\pi n$; $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{3}$; -2π; $-\dfrac{5\pi}{3}$.

25. а) Решите уравнение $\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{5}{\sin x}+2=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\,\pi\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$; $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{5\pi}{6}$.

Глава 6

Образцы заданий 2013 года

1. а) Решите уравнение $-\sqrt{2}\sin\left(-\dfrac{5\pi}{2}+x\right)\cdot\sin x=\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{9\pi}{2};\,6\pi\right]$.

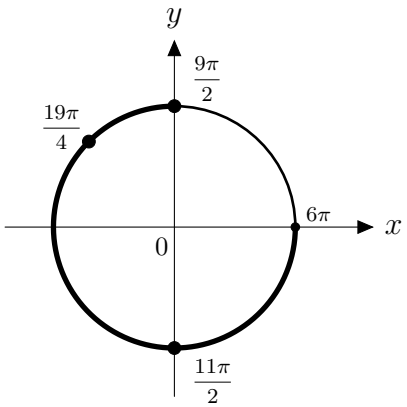
Решение. а) Так как $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{2}+x\right)=-\cos x$, то имеем уравнение:

$$\sqrt{2}\cos x\cdot\sin x=\cos x \iff \sqrt{2}\cos x\cdot\sin x-\cos x=0 \iff \cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right. .$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x=\frac{9\pi}{2},\ x=\frac{11\pi}{2},\ x=\frac{19\pi}{4}.$$



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi n$; $\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$; $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m$, n, k, $m\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{9\pi}{2}$; $\dfrac{11\pi}{2}$; $\dfrac{19\pi}{4}$.

2. а) Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\, -\pi\right]$.

Решение. а) Запишем уравнение в виде

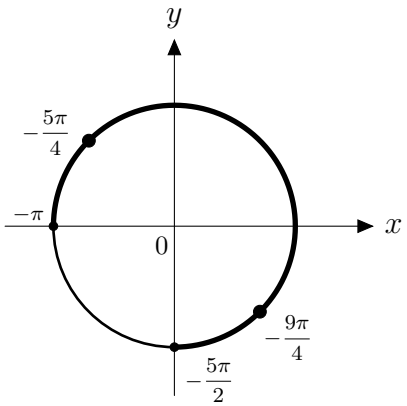
$$2^{\sin x} \cdot 5^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$$

и поделим обе части уравнения на $2^{\sin x} > 0$. Получим:

$$5^{\sin x} = 5^{-\cos x} \iff \sin x = -\cos x \iff \operatorname{tg} x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{9\pi}{4},\ x = -\frac{5\pi}{4}.$$



Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{4}$.

3. а) Решите уравнение $2\sin^2 x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\, -\pi\right]$.

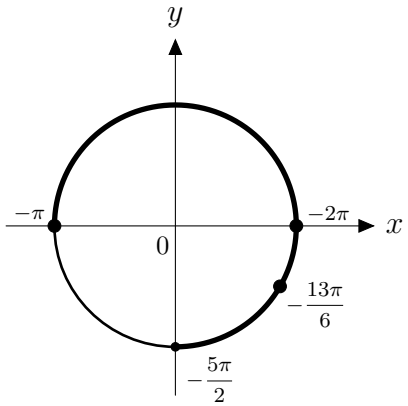
Решение. а) Так как $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$, то имеем уравнение:

$$2\sin^2 x = -\sin x \iff 2\sin^2 x + \sin x = 0 \iff \sin x\,(2\sin x + 1) = 0 \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -2\pi,\ x = -\pi,\ x = -\frac{13\pi}{6}.$$



Ответ: а) πn; $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$; $\dfrac{7\pi}{6}+2\pi m$, n, k, $m\in\mathbb{Z}$; б) -2π; $-\pi$; $-\dfrac{13\pi}{6}$.

4. а) Решите уравнение $\sin 2x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\,-\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

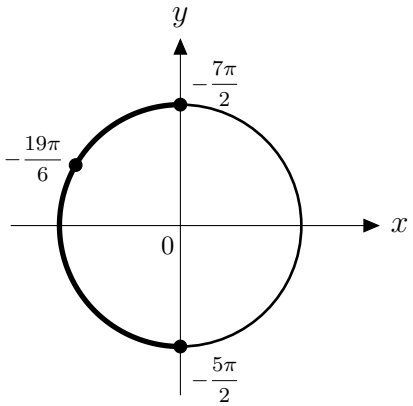
Решение. а) Так как $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$, то имеем уравнение:

$$\sin 2x=\cos x \iff 2\sin x\cos x-\cos x=0 \iff \cos x\,(2\sin x-1)=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right. .$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x=-\frac{7\pi}{2},\ x=-\frac{5\pi}{2},\ x=-\frac{19\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi n$; $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$; $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m$, n, k, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{2}$; $-\dfrac{5\pi}{2}$; $-\dfrac{19\pi}{6}$.

5. а) Решите уравнение $(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3\cos x}{2}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

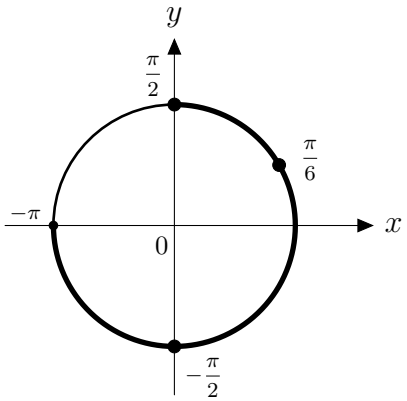
Решение. а) Имеем уравнение:

$$3^{3\sin x\cos x} = 3^{\frac{3\cos x}{2}} \iff 3\sin x\cos x = \frac{3\cos x}{2} \iff 3\cos x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}\end{array}\right. .$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{2}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ n,\ k,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}$.

6. а) Решите уравнение $9^{x+1} - 2\cdot 3^{x+2} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left(\log_3\frac{3}{2};\ \sqrt{5}\right)$.

Решение. а) Имеем уравнение:

$$9\cdot 9^x - 18\cdot 3^x + 5 = 0 \iff (3\cdot 3^x - 5)(3\cdot 3^x - 1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l}3^x = \dfrac{5}{3}\\ 3^x = \dfrac{1}{3}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x = \log_3\dfrac{5}{3}\\ x = -1\end{array}\right. .$$

б) Очевидно, $x = -1 \notin \left(\log_3\frac{3}{2};\ \sqrt{5}\right)$. Так как

$$\log_3\frac{3}{2} < \log_3\frac{5}{3} < \log_3 3 = 1 < \sqrt{5},$$

то $x = \log_3 \dfrac{5}{3} \in \left(\log_3 \dfrac{3}{2};\ \sqrt{5}\right)$.

Ответ: а) $-1;\ \log_3 \dfrac{5}{3}$; б) $\log_3 \dfrac{5}{3}$.

7. а) Решите уравнение $1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1;\ \dfrac{8}{9}\right]$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной x задается условием $x \in \mathbb{R}$. Имеем уравнение:

$$\log_2 2 + \log_2(9x^2 + 5) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_2(8x^4 + 14) \iff \log_2(18x^2 + 10) = \log_2(8x^4 + 14) \iff$$

$$\iff 18x^2 + 10 = 8x^4 + 14 \iff 4x^4 - 9x^2 + 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{1}{4} \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{1}{2} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

б) Указанному отрезку принадлежат два корня $x = \pm\dfrac{1}{2}$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{1}{2};\ \pm\sqrt{2}$; б) $\pm\dfrac{1}{2}$.

8. а) Решите уравнение $3\,\mathrm{tg}^2 x - \dfrac{5}{\cos x} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

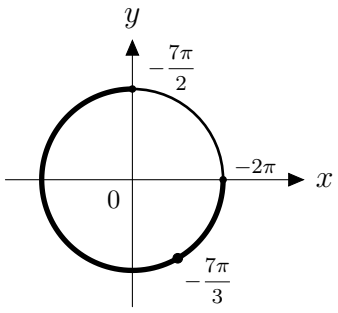
Решение. а) Область допустимых значений переменной x задается условием $\cos x \neq 0$. Так как $1 + \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, то имеем уравнение:

$$3\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0 \iff \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos x} - 2 = 0 \iff$$

$$2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = -3 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{7\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

9. а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)\cdot\sin x=\sqrt{3}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-7\pi;\ -6\pi]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $\frac{4\pi}{3}+2\pi m$, n, k, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{20\pi}{3}$; $-\frac{13\pi}{2}$; $-\frac{19\pi}{3}$.

10. а) Решите уравнение $15^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;\ \frac{13\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

11. а) Решите уравнение $21^{-\sin x}=3^{-\sin x}\cdot 7^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$.

12. а) Решите уравнение $20^{\cos x}=4^{\cos x}\cdot 5^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{4}$.

13. а) Решите уравнение $2\cos^2 x=\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$.

14. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\cos^2 x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, n, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{9\pi}{4}$.

15. а) Решите уравнение $2\sin^2 x=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Ответ: а) πn; $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $\frac{4\pi}{3}+2\pi m$, n, k, $m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}$; 2π; 3π.

16. а) Решите уравнение $\sin 2x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3};\ 2\pi;\ \frac{7\pi}{3}$.

17. а) Решите уравнение $\sin 2x=\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;\ -2\pi]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-3\pi;\ -\frac{17\pi}{6};\ -2\pi$.

18. а) Решите уравнение $\sin 2x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ n,\ k,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2};\ \frac{11\pi}{4};\ \frac{7\pi}{2}$.

19. а) Решите уравнение $\left(36^{\sin x}\right)^{\cos x}=6^{\sqrt{2}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $2\pi;\ \frac{9\pi}{4};\ 3\pi$.

20. а) Решите уравнение $\left(36^{\sin x}\right)^{-\cos x}=6^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{10\pi}{3};\ -3\pi;\ -\frac{8\pi}{3};\ -2\pi$.

21. а) Решите уравнение $\left(25^{\sin x}\right)^{-\cos x}=5^{\sqrt{2}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $2\pi;\ \frac{11\pi}{4};\ 3\pi$.

22. а) Решите уравнение $25^{x-\frac{3}{2}}-12\cdot 5^{x-2}+7=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left(2;\ \frac{8}{3}\right)$.

Ответ: а) $2;\ \log_5 32$; б) $\log_5 32$.

23. а) Решите уравнение

$$16^{x-1}-3\cdot 4^x+11=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $(\log_4 25;\ \sqrt{10})$.

Ответ: а) $2;\ \log_4 44$; б) $\log_4 44$.

24. а) Решите уравнение

$$4^{x-\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^{x-1} + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left(1;\ \frac{5}{3}\right)$.

Ответ: а) 1; $\log_2 3$; б) $\log_2 3$.

25. а) Решите уравнение

$$16^{x+\frac{1}{4}} - 41 \cdot 4^{x-1} + 9 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $(0;\ 1)$.

Ответ: а) 1; $\log_4 \frac{9}{8}$; б) $\log_4 \frac{9}{8}$.

26. а) Решите уравнение

$$9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left(1;\ \frac{7}{3}\right)$.

Ответ: а) 1; $\log_3 5$; б) $\log_3 5$.

27. а) Решите уравнение $1 + \log_3(10x^2 + 1) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3x^4 + 30}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11}{4};\ \frac{2}{3}\right]$.

Ответ: а) ± 1; ± 3; б) -1.

28. а) Решите уравнение

$$\log_2(4x^4 + 28) = 2 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{5x^2 + 1}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9}{5};\ \frac{7}{5}\right]$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{3}$.

29. а) Решите уравнение

$$1 + \log_3(x^4 + 25) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{30x^2 + 12}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2.2;\ 3.2]$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{7}$; б) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$.

30. а) Решите уравнение

$$2 + \log_2(x^2 + 8) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4x^4 + 8}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1.3;\ 2.2]$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$.

31. а) Решите уравнение

$$\log_3(3x^4+42) = 1 + \log_{\sqrt{3}}\sqrt{13x^2+2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5}{4};\, 2\right]$.

Ответ: а) ± 1; $\pm\sqrt{12}$; б) ± 1.

32. а) Решите уравнение

$$1 + \log_5(5x^2+20) = \log_{\sqrt{5}}\sqrt{5x^4+30}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3.2;\, 2.6]$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{7}$; б) $-\sqrt{7}$.

33. а) Решите уравнение

$$1 + \log_3(x^4+16) = \log_{\sqrt{3}}\sqrt{21x^2+18}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3}{2};\, \frac{5}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{5}$; б) $\pm\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$.

34. а) Решите уравнение

$$1 + \log_3(23x^2+1) = \log_{\sqrt{3}}\sqrt{9x^4+45}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2;\, 1]$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\pm\sqrt{7}$; б) $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

35. а) Решите уравнение $5\,\mathrm{tg}^2\, x + \dfrac{3}{\cos x} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\, 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 3π.

36. а) Решите уравнение

$$3\,\mathrm{tg}^2\, x - \frac{5}{\cos x} + 5 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\, -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) -2π.

37. а) Решите уравнение

$$2\,\mathrm{tg}^2\,x + \frac{5}{\cos x} + 4 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{10\pi}{3}$.

Глава 7

Образцы заданий 2012 года

1. а) Решите уравнение

$$\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

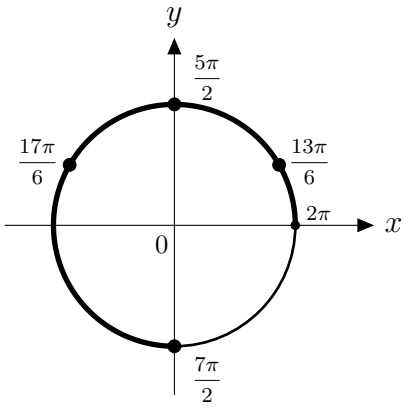
Решение. а) Имеем уравнение:

$$\cos x - \sin 2x + 25 = 5^2 \iff \cos x - 2\sin x \cos x = 0 \iff \cos x\,(1 - 2\sin x) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z} \end{array}\right. .$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{13\pi}{6},\ x = \frac{5\pi}{2},\ x = \frac{17\pi}{6},\ x = \frac{7\pi}{2}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ n,\ k,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6};\ \frac{5\pi}{2};\ \frac{17\pi}{6};\ \frac{7\pi}{2}$.

2. а) Решите уравнение $4\cos^3 x + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi;\, 2\pi]$.

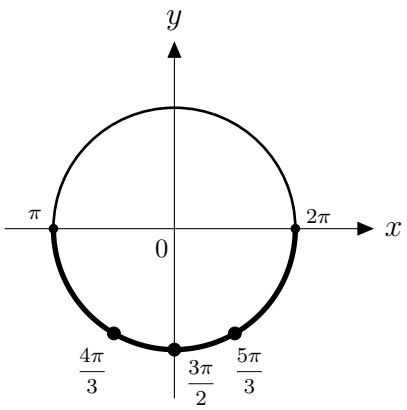
Решение. а) Так как $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$, то имеем уравнение:

$$4\cos^3 x-\cos x=0 \iff \cos x\,(4\cos^2 x-1)=0 \iff \cos x\,(2\cos x+1)(2\cos x-1)=0$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\!.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x=\frac{4\pi}{3},\ x=\frac{3\pi}{2},\ x=\frac{5\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{4\pi}{3};\ \dfrac{3\pi}{2};\ \dfrac{5\pi}{3}$.

3. а) Решите уравнение $6\sin^2 x+5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-2=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\ -\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

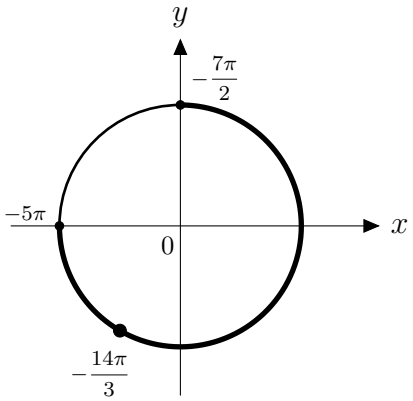
Решение. а) Так как $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, то имеем уравнение:

$$6\sin^2 x+5\cos x-2=0 \iff 6\cdot(1-\cos^2 x)+5\cos x-2=0 \iff 6\cos^2 x-5\cos x-4=0$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{4}{3}\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \iff x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x=-\frac{14\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{14\pi}{3}$.

4. а) Решите уравнение

$$\sin 2x=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2};\ -\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

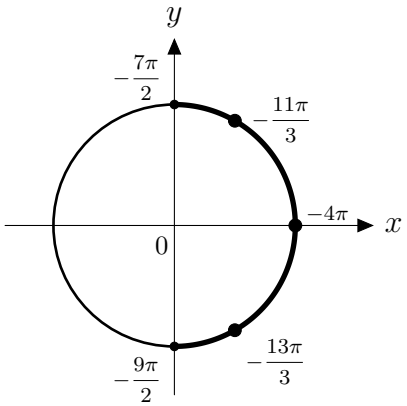
Решение. а) Так как $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)=\sin x$, то имеем уравнение:

$$\sin 2x=\sin x \iff 2\sin x\cos x-\sin x=0 \iff \sin x\,(2\cos x-1)=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\!.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x=-4\pi,\ x=-\frac{11\pi}{3},\ x=-\frac{13\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pi n;\ \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-4\pi;\ -\dfrac{11\pi}{3};\ -\dfrac{13\pi}{3}$.

5. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\cos^3 x - \sqrt{2}\cos x + \sin^2 x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\, 4\pi\right]$.

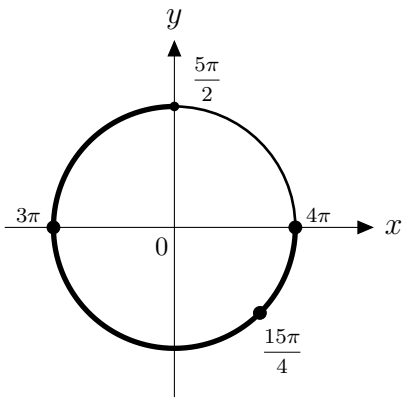
Решение. а) Так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то имеем уравнение:

$$\sqrt{2}\cos x\,(\cos^2 x - 1) + \sin^2 x = 0 \iff -\sqrt{2}\cos x \cdot \sin^2 x + \sin^2 x = 0 \iff$$

$$\iff \sin^2 x\,(1 - \sqrt{2}\cos x) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = 3\pi,\ x = 4\pi,\ x = \frac{15\pi}{4}.$$



Ответ: а) πn; $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) 3π; 4π; $\dfrac{15\pi}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения

6. а) Решите уравнение

$$\log_4(\sin x + \sin 2x + 16) = 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-4\pi;\ -\frac{10\pi}{3};\ -3\pi;\ -\frac{8\pi}{3}$.

7. а) Решите уравнение

$$\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi m,\ n,\ k,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2};\ \frac{11\pi}{6};\ \frac{5\pi}{2}$.

8. а) Решите уравнение

$$\log_3(\sin x - \sin 2x + 27) = 3.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi;\ -\frac{7\pi}{3};\ -2\pi$.

9. а) Решите уравнение $4\sin^3 x = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{3};\ 4\pi;\ \frac{13\pi}{3}$.

10. а) Решите уравнение $2\cos^3 x = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ -\pi]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{4}$.

11. а) Решите уравнение $4\cos^3 x + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ -\pi]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6};\ -\frac{3\pi}{2};\ -\frac{7\pi}{6}$.

12. а) Решите уравнение $4\cos^2 x - 8\sin x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

13. а) Решите уравнение $4\cos^2 x + 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

14. а) Решите уравнение $2\cos 2x - 8\sin x + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6};\ \frac{17\pi}{6}$.

15. а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3};\ -\pi;\ -\frac{2\pi}{3}$.

16. а) Решите уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6};\ 3\pi;\ \frac{19\pi}{6}$.

17. а) Решите уравнение $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi m,\ n,\ k,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{17\pi}{6};\ -\frac{5\pi}{2}$.

18. а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ n,\ k,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{2};\ \frac{25\pi}{6};\ \frac{9\pi}{2}$.

19. а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{3};\ 3\pi;\ \frac{10\pi}{3}$.

20. а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x - 2\cos x + \sin^2 x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Ответ: а) πn; $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $n,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{5\pi}{3}$; 2π; $\dfrac{7\pi}{3}$; 3π.

21. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^3 x - \sqrt{2}\sin x + \cos^2 x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$; $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $n,\ k,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{5\pi}{2}$; $-\dfrac{7\pi}{4}$; $-\dfrac{3\pi}{2}$; $-\dfrac{5\pi}{4}$.

22. а) Решите уравнение

$$2\sin^3 x - 2\sin x + \cos^2 x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$; $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $n,\ k,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{2}$; $-\dfrac{19\pi}{6}$; $-\dfrac{5\pi}{2}$.

Глава 8

Образцы заданий 2011 года

1. Решите уравнение $\dfrac{6\sin^2 x + 7\sin x - 5}{\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1} = 0.$

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \operatorname{tg} x \neq \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 6\sin^2 x + 7\sin x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{5}{3} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$

2. Решите уравнение $(4\sin^2 x + 8\sin x - 5) \cdot \log_{16}(-\cos x) = 0.$

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\left[\begin{array}{l} \log_{16}(-\cos x) = 0 \\ \begin{cases} -\cos x > 0 \\ 4\sin^2 x + 8\sin x - 5 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right..$$

Ответ: $\pi + 2\pi n;\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}.$

3. Решите уравнение $(\sqrt{3}\cos x - 2\cos^2 x) \cdot \log_5(-\operatorname{tg} x) = 0.$

Решение. Область допустимых значений переменной x задается системой:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}.$$

Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3}\cos x - 2\cos^2 x = 0 \\ \log_5(-\operatorname{tg} x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x\,(\sqrt{3} - 2\cos x) = 0 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right..$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n;\ -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Решите уравнение $\sqrt{2\sin x - 1} \cdot \log_7(-2\cos x) = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2\cos x > 0 \\ \sqrt{2\sin x - 1} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sin x - 1 \geqslant 0 \\ \log_7(-2\cos x) = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right..$$

Ответ: $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}$.

Задачи для самостоятельного решения

5. Решите уравнение $\dfrac{8\sin^2 x - 10\sin x - 7}{1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x} = 0.$

Ответ: $\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

6. Решите уравнение $(4\cos^2 x - 4\cos x - 3) \cdot \log_{14}(-\sin x) = 0.$

Ответ: $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}.$

7. Решите уравнение $(2\sin^2 x - 5\sin x + 2) \cdot \log_{12}(\cos x) = 0.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n;\ 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}.$

8. Решите уравнение $(4\sin^2 x - 8\sin x + 3) \cdot \log_{16}(-\cos x) = 0.$

Ответ: $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}.$

9. Решите уравнение $(6\sin^2 x + 5\sin x - 4) \cdot \sqrt{-7\cos x} = 0.$

Ответ: $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}.$

10. Решите уравнение $(2\sin x + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{\cos x} = 0.$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}.$

11. Решите уравнение $(2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x) \cdot \log_3(\mathrm{tg}\, x) = 0.$

Ответ: $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}.$

12. Решите уравнение $(\mathrm{tg}^2 x - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x) \cdot \sqrt{-5\cos x} = 0.$

Ответ: $\pi + 2\pi n;\ \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}.$

13. Решите уравнение $(\mathrm{tg}^2 x + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x) \cdot \sqrt{7\cos x} = 0.$

Ответ: $2\pi n;\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}.$

14. Решите уравнение $\sqrt{2\cos x + 1} \cdot \log_2(2\sin x) = 0.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ n,\ k \in \mathbb{Z}.$

15. Решите уравнение $\sqrt{1 - 2\cos x} \cdot \log_5(-2\sin x) = 0.$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ n,\ k\in\mathbb{Z}.$