ЗАДАНИЕ 18 ИЗ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАЧА С ПАРАМЕТРОМ

Оглавление

Аннотация

В пособии разобраны все прототипы задач с параметрами (№18). Все решения являются авторскими. Автор разрешает свободное использование пособия в любых учебных целях.

Пожелания учащимся

Задачу с параметром №18 на экзамене верно решают только 1% учеников. Автор надеется, что это пособие поможет вам войти в их число. Обсуждайте решения с одноклассниками, задавайте вопросы учителям, репетиторам и на сайтах самоподготовки. Ведь активность в учебе – залог успеха!

Об авторе

Тимур Гуев – сотрудник Mail.Ru Group, учитель математики школы №1363, программист. Основатель и преподаватель онлайн-школы BEEGEEK.

Открыт для обсуждения, критики и сотрудничества.

Глава 1

Образцы заданий 2018 года

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x+5)^2+y^2-a^2)\ln(9-x^2-y^2)=0 \\ ((x+5)^2+y^2-a^2)(x+y-a+5)=0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

Решение. 1) Область допустимых значений переменных x и y задается неравенством $9-x^2-y^2>0$. Таким образом, если пара чисел $(x;\,y)$ является решением системы, то выполняется неравенство $x^2+y^2<9$.

2) Если $(x+5)^2+y^2-a^2=0$, то оба уравнения системы обращаются в верное числовое равенство. Имеем систему:

$$\begin{cases} (x+5)^2+y^2=a^2 \\ x^2+y^2<9 \end{cases}.$$

Первое уравнение системы задает семейство концентрических окружностей с центром в точке $O_1(-5;\,0)$ радиуса $R=|a|$. Второе неравенство системы задает круг без границы с центром в точке $O_2(0;\,0)$ радиуса $r=3$.

Если окружность пересекается с кругом более чем в одной точке, то система имеет бесконечное множество решений, что не удовлетворяет условию задачи. Значит, окружность $(x+5)^2+y^2=a^2$ не должна пересекаться с кругом $x^2+y^2<9$ более чем в одной точке. Имеем совокупность:

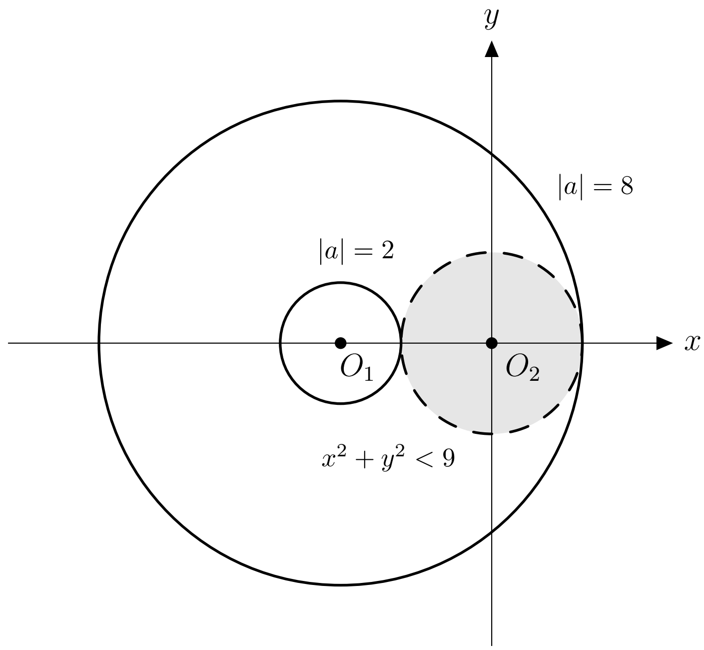
$$\left[\begin{array}{l} R+r\leqslant O_1O_2 \\ R-r\geqslant O_1O_2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} |a|+3\leqslant 5 \\ |a|-3\geqslant 5 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} |a|\leqslant 2 \\ |a|\geqslant 8 \end{array}\right..$$

Итак, для выполнения условия задачи необходимо, чтобы первая скобка исходной системы не имела решений. Это условие будет соблюдаться при $a\in(-\infty;\,-8]\cup[-2;\,2]\cup[8;\,+\infty)$.

3) Таким образом, $(x+5)^2+y^2-a^2\neq 0$, и мы имеем систему

$$\begin{cases} \ln(9-x^2-y^2)=0 \\ x+y-a+5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y=-x+a-5 \end{cases},$$

которая при условии $a\in(-\infty;\,-8]\cup[-2;\,2]\cup[8;\,+\infty)$ должна иметь ровно два решения.

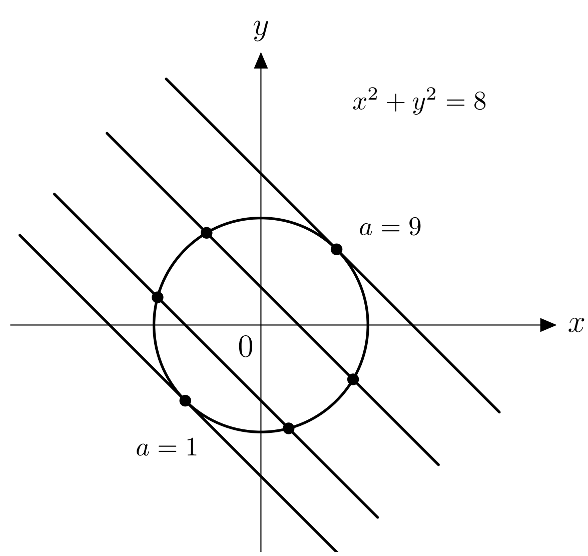


Первое уравнение системы задает окружность с центром в начале координат радиуса $\sqrt{8}$. Второе уравнение задает семейство прямых, параллельных прямой $y = -x$ либо совпадающих с ней.

Подставляя в первое уравнение системы выражение $y = -x + a - 5$, получим квадратное уравнение $x^2 + (-x + a - 5)^2 = 8$, которое должно иметь ровно два решения. Имеем:

$$x^2 + (-x + a - 5)^2 = 8 \iff 2x^2 + 2(5 - a)x + a^2 - 10a + 17 = 0 \Longrightarrow$$

$$D = 4(5 - a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^2 - 10a + 17) > 0 \iff a \in (1;\, 9).$$



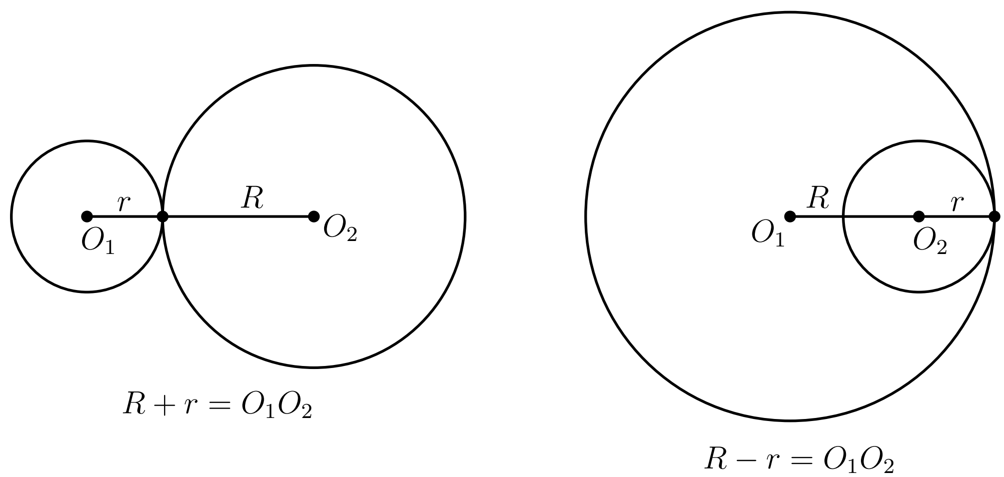
4) Итак, исходная система имеет ровно два решения при

$$\begin{cases} a \in (-\infty;\, -8] \cup [-2;\, 2] \cup [8;\, +\infty) \\ a \in (1;\, 9) \end{cases} \iff a \in (1;\, 2] \cup [8;\, 9).$$

Ответ: $a \in (1;\ 2] \cup [8;\ 9)$.

Комментарий.

А. При решении задачи мы воспользовались условиями внешнего и внутреннего касания двух окружностей.



Б. Найти значения параметров $a = 1$ и $a = 9$, при которых прямая касается окружности, можно при помощи формулы нахождения расстояния от точки до прямой. В нашем случае расстояние от центра окружности $x^2 + y^2 = 8$, то есть точки $(0;\ 0)$, до прямой равно радиусу окружности $\sqrt{8}$. Имеем:

$$\rho = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - a + 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|a - 5|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8} \Longrightarrow |a - 5| = 4 \iff a = 1,\ a = 9.$$

В. Расстояние от точки $M(x_0;\ y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$ вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + 6x) \ln\left(\dfrac{3x + 4y + a}{20}\right) = 0 \\ (x^2 + y^2 + 6x)(x^2 + y^2 - 12x) = 0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

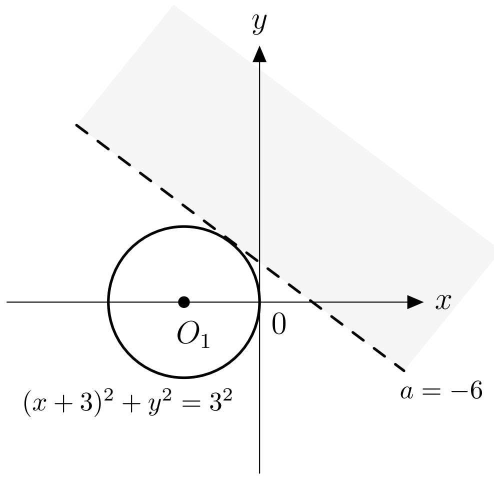
Решение. 1) Область допустимых значений переменных x и y задается неравенством $3x + 4y + a > 0$. Таким образом, если пара чисел $(x;\ y)$ является решением системы, то выполняется неравенство $3x + 4y + a > 0$.

2) Если $x^2 + y^2 + 6x = 0$, то оба уравнения системы обращаются в верное числовое равенство. Имеем систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x = 0 \\ 3x + 4y + a > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x + 3)^2 + y^2 = 3^2 \\ y > -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{a}{4} \end{cases}.$$

Первое уравнение системы задает окружность с центром в точке $O_1(-3;\,0)$ радиуса $R = 3$. Второе неравенство системы задает полуплоскость, лежащую над прямой $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{a}{4}$.

Такая система может либо иметь бесконечно много решений, что не подходит под условие задачи, либо не иметь решений вовсе. Найдем значение параметра a, при котором прямая



касается окружности сверху. Имеем:

$$\rho = \frac{|3\cdot(-3) + 4\cdot 0 + a|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|a-9|}{5} = 3 \iff a_1 = -6,\ a_2 = 24.$$

Верхнему касанию соответствует значение $a = -6$. Итак, для выполнения условия задачи необходимо, чтобы первая скобка исходной системы не давала решений. Это условие будет соблюдаться при $a \in (-\infty;\,-6]$.

3) Таким образом, $x^2 + y^2 + 6x \neq 0$, и мы имеем систему

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{3x+4y+a}{20}\right) = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 4y + a - 20 = 0 \\ (x-6)^2 + y^2 = 6^2 \end{cases},$$

которая при условии $a \in (-\infty;\,-6]$ должна иметь ровно два решения.

Второе уравнение системы задает окружность с центром в точке $O_2(6;\,0)$ радиуса 6. Первое уравнение задает семейство прямых, параллельных прямой $y = -\dfrac{3}{4}x$ либо совпадающих с ней.

Такая система будет иметь ровно два решения, если расстояние от центра окружности $(x-6)^2 + y^2 = 6^2$ до прямой $3x + 4y + a - 20 = 0$ будет меньше радиуса. Имеем:

$$\rho = \frac{|3\cdot 6 + 4\cdot 0 + a - 20|}{\sqrt{3^2+4^2}} < 6 \iff \frac{|a-2|}{5} < 6 \iff a \in (-28;\,32).$$

4) Итак, исходная система имеет ровно два решения при

$$\begin{cases} a \in (-\infty;\,-6] \\ a \in (-28;\,32) \end{cases} \iff a \in (-28;\,-6].$$

Ответ: $a \in (-28;\ -6]$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x+y-2a)\sqrt{8x-x^2-y^2}=0 \\ (x+y-2a)(x^2+(y+3)^2-a^2)=0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

Решение. 1) Область допустимых значений переменных x и y задается неравенством $8x-x^2-y^2 \geqslant 0$. Таким образом, если пара чисел $(x;\ y)$ является решением системы, то для них выполняется неравенство $8x-x^2-y^2 \geqslant 0$.

2) Если $x+y-2a=0$, то оба уравнения системы обращаются в верное числовое равенство. Имеем систему:

$$\begin{cases} x+y-2a=0 \\ 8x-x^2-y^2 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-2a=0 \\ (x-4)^2+y^2 \leqslant 4^2 \end{cases}$$

Первое уравнение системы задает семейство прямых, параллельных либо совпадающих с прямой $y=-x$. Второе неравенство системы задает круг, включая границу с центром в точке $O(4;\ 0)$, радиуса 4.

Такая система может либо иметь бесконечно много решений, либо иметь единственное решение, либо не иметь решений вовсе.

Найдем такие a, при которых прямая касается окружности. Имеем:

$$\rho = \frac{|1\cdot 4 + 1\cdot 0 - 2a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 4 \iff a = 2 \pm 2\sqrt{2}.$$

Итак, при $a = 2\pm 2\sqrt{2}$ система имеет одно решение, при $a \in (2-2\sqrt{2};\ 2+2\sqrt{2})$ система имеет бесконечно много решений, и при $a \in (-\infty;\ 2-2\sqrt{2}) \cup (2+2\sqrt{2};\ +\infty)$ система не имеет решений.

Для выполнения условия задачи необходимо, чтобы первая скобка исходной системы не имела решений либо имела одно решение. Это условие будет соблюдаться при $a \in (-\infty;\ 2-2\sqrt{2}] \cup [2+2\sqrt{2};\ +\infty)$.

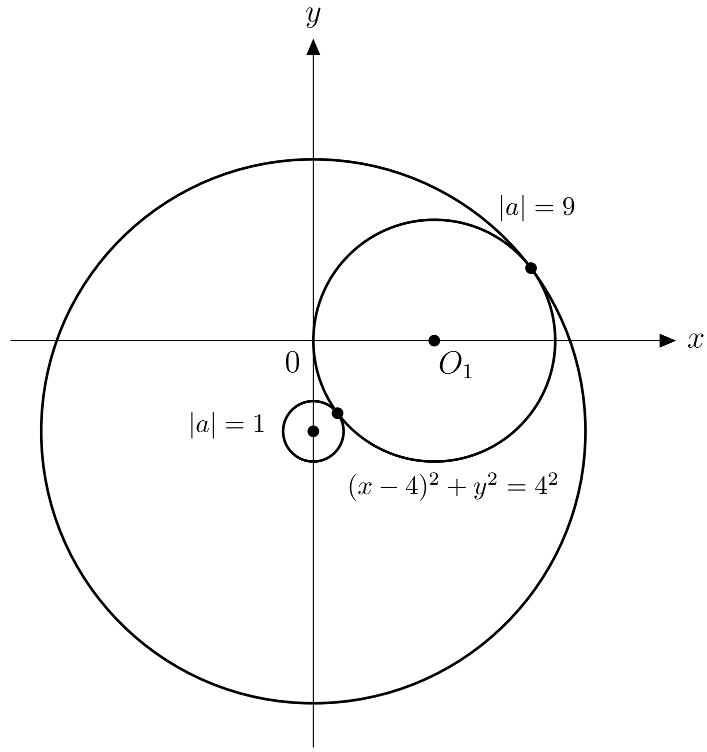
3) Имеем систему

$$\begin{cases} \sqrt{8x-x^2-y^2}=0 \\ x^2+(y+3)^2-a^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-4)^2+y^2=4^2 \\ x^2+(y+3)^2=a^2 \end{cases},$$

которая должна иметь ровно два решения при $a \in (-\infty;\ 2-2\sqrt{2}) \cup (2+2\sqrt{2};\ +\infty)$ или иметь единственное решение при $a = 2\pm 2\sqrt{2}$.

Первое уравнение системы задает окружность с центром в точке $O_1(4;\ 0)$ радиуса $r=4$. Второе уравнение задает семейство концентрических окружностей с центром в точке $O_2(0;\ -3)$ радиуса $R=|a|$.

При $a = 2\pm 2\sqrt{2}$ окружности не касаются, значит, такие значения не подходят к условию задачи.



Система будет иметь ровно два решения при

$$\begin{cases} R + r > O_1O_2 \\ R - r < O_1O_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |a| + 4 > 5 \\ |a| - 4 < 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |a| > 1 \\ |a| < 9 \end{cases} \Longleftrightarrow a \in (-9;\ -1) \cup (1;\ 9).$$

Итак, исходная система имеет ровно два решения при

$$\begin{cases} a \in (-\infty;\ 2 - 2\sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{2};\ +\infty) \\ a \in (-9;\ -1) \cup (1;\ 9) \end{cases} \Longleftrightarrow a \in (-9;\ -3) \cup (2 + 2\sqrt{2};\ 9).$$

Ответ: $a \in (-9;\ -3) \cup (2 + 2\sqrt{2};\ 9)$.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = a^2 - 3a \end{cases}$$

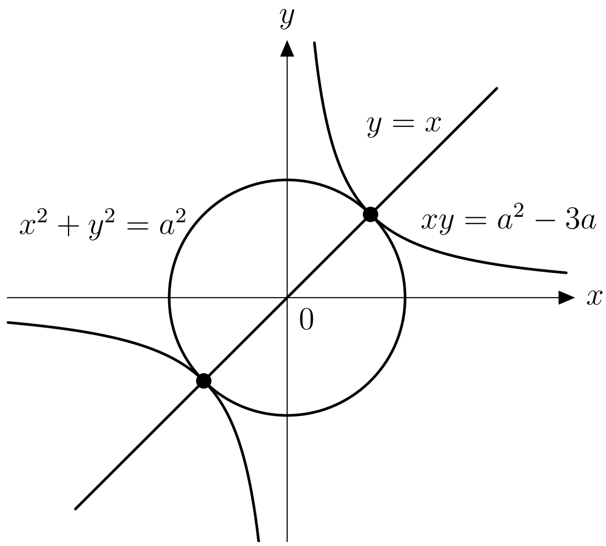
имеет ровно два различных решения.

Решение. 1) Первое уравнение системы задает окружность с центром в начале координат радиуса $R = |a|$. Второе уравнение системы задает:

- при $a^2 - 3a = 0$ две взаимно перпендикулярные прямые $x = 0$, $y = 0$;
- при $a^2 - 3a > 0$ гиперболу в 1-й и 3-й координатных четвертях;
- при $a^2 - 3a < 0$ гиперболу во 2-й и 4-й координатных четвертях.

2) При $a = 0$ система имеет одно решение $(0;\ 0)$. При $a = 3$ система имеет 4 решения: $(0;\ 3), (0;\ -3), (-3;\ 0), (3;\ 0)$.

3) Рассмотрим случай $a^2 - 3a > 0$. Ввиду симметрии относительно биссектрисы $y = x$ система будет иметь ровно два решения, если точки касания гиперболы и окружности лежат на биссектрисе $y = x$.

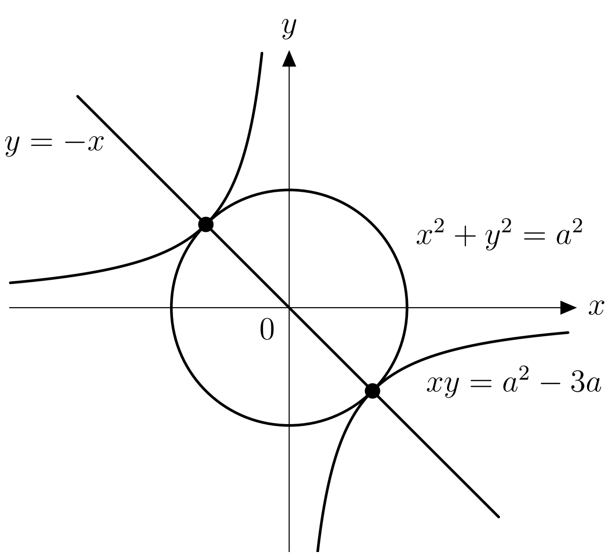


Имеем систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = a^2 - 3a \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = a^2 \\ x^2 = a^2 - 3a \\ y = x \end{cases} \Longrightarrow a = 0,\ a = 6.$$

Случай $a = 0$ был рассмотрен ранее. При $a = 6$ выражение $a^2 - 3a > 0$, значит, это искомое значение параметра.

4) Рассмотрим случай $a^2 - 3a < 0$.



Ввиду симметрии относительно биссектрисы $y = -x$ система будет иметь ровно два решения, если точки касания гиперболы и окружности лежат на биссектрисе $y = -x$. Имеем систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ xy=a^2-3a \\ y=-x \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2=a^2 \\ -x^2=a^2-3a \\ y=-x \end{cases} \Longrightarrow a=0,\ a=2.$$

Случай $a=0$ был рассмотрен ранее. При $a=2$ выражение $a^2-3a<0$, значит, это искомое значение параметра.

4) Итак, система имеет ровно два решения при $a=2$, $a=6$.

Ответ: $a=2$, $a=6$.

5. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-4(a+1)x-2ay+5a^2+8a+3=0 \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Исходная система равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-4(a+1)x-2ay+5a^2+8a+3=0 \\ y=x \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-4(a+1)x-2ay+5a^2+8a+3=0 \\ y=-x \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2-2(3a+2)x+5a^2+8a+3=0 \\ y=x \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2-2(a+2)x+5a^2+8a+3=0 \\ y=-x \end{cases} \end{array}\right..$$

Совокупность будет иметь ровно 4 решения, если каждая система совокупности имеет ровно два решения и при этом среди решений нет значений, при которых $x=-x$, то есть $x=0$.

При $x=0$ получаем $5a^2+8a+3=0$, откуда $a=-1$, $a=-\dfrac{3}{5}$. Такие значения необходимо исключить.

Каждая из систем имеет два решения, если дискриминант квадратного уравнения положителен. Имеем:

$$\begin{cases} 4(3a+2)^2-8(5a^2+8a+3)>0 \\ 4(a+2)^2-8(5a^2+8a+3)>0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+4a+2<0 \\ 9a^2+12a+2<0 \end{cases} \iff a\in\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{2}-2\right).$$

Окончательно получаем ответ:

$$a\in\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2};\ -1\right)\cup\left(-1;\ -\frac{3}{5}\right)\cup\left(-\frac{3}{5};\ \sqrt{2}-2\right).$$

Ответ: $a\in\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2};\ -1\right)\cup\left(-1;\ -\dfrac{3}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{5};\ \sqrt{2}-2\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y=(a+3)x^2+2ax+a-3 \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Исходная система равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=(a+3)x^2+2ax+a-3\\ y=x\end{cases}\\ \begin{cases}y=(a+3)x^2+2ax+a-3\\ y=-x\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a+3)x^2+(2a-1)x+a-3=0\\ y=x\end{cases}\\ \begin{cases}(a+3)x^2+(2a+1)x+a-3=0\\ y=-x\end{cases}\end{array}\right. .$$

Совокупность будет иметь ровно 4 решения, если каждая система совокупности имеет ровно два решения и при этом среди решений нет значений, при которых $x=-x$, то есть $x=0$.

При $x=0$ получаем $a-3=0$, откуда $a=3$. Такое значение необходимо исключить.

Системы совокупности имеют 2 решения, если дискриминант квадратного уравнения положителен. Имеем:

$$\begin{cases}a+3\neq 0\\ (2a-1)^2-4(a^2-9)>0\\ (2a+1)^2-4(a^2-9)>0\end{cases} \iff \begin{cases}a\neq -3\\ a<\dfrac{37}{4}\\ a>-\dfrac{37}{4}\end{cases} \iff a\in\left(-\frac{37}{4};\,-3\right)\cup\left(-3;\,\frac{37}{4}\right).$$

Окончательно получаем ответ:

$$a\in\left(-\frac{37}{4};\,-3\right)\cup(-3;\,3)\cup\left(3;\,\frac{37}{4}\right).$$

Ответ: $a\in\left(-\frac{37}{4};\,-3\right)\cup(-3;\,3)\cup\left(3;\,\frac{37}{4}\right)$.

Комментарий.

При решении задачи необходимо было учесть тот факт, что при $a=-3$ уравнения совокупности перестают быть квадратными и становятся линейными.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x+ay-3)(x+ay-3a)=0\\ x^2+y^2=8\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Исходная система равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+ay-3=0\\ x^2+y^2=8\end{cases}\\ \begin{cases}x+ay-3a\\ x^2+y^2=8\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3-ay\\ x^2+y^2=8\end{cases}\\ \begin{cases}x=3a-ay\\ x^2+y^2=8\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3-ay\\ (a^2+1)y^2-6ay+1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=3a-ay\\ (a^2+1)y^2-6a^2y+9a^2-8=0\end{cases}\end{array}\right. .$$

Совокупность будет иметь ровно 4 решения, если каждая система совокупности имеет ровно два решения и при этом среди решений нет значений x, при которых $3 - ay = 3a - ay$. Итак, $a \neq 1$.

Системы совокупности имеют 2 решения, если дискриминант квадратного уравнения положителен. Имеем:

$$\begin{cases} 36a^2 - 4(a^2+1) > 0 \\ 36a^4 - 4(a^2+1)(9a^2-8) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 > \dfrac{1}{8} \\ a^2 < 8 \end{cases} \iff a \in \left(-\sqrt{8};\, -\frac{1}{\sqrt{8}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{8}};\, \sqrt{8}\right).$$

Окончательно получаем ответ:

$$a \in \left(-\sqrt{8};\, -\frac{1}{\sqrt{8}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{8}};\, 1\right) \cup \left(1;\, \sqrt{8}\right).$$

Ответ: $a \in \left(-\sqrt{8};\, -\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{8}};\, 1\right) \cup \left(1;\, \sqrt{8}\right)$.

8. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (2a-5)x + 2ay + 1 = 0 \\ x^2 + y = xy + x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы:

$$x^2 + y = xy + x \iff x^2 - xy + y - x = 0 \iff x(x-y) - (x-y) = 0 \iff \left[\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= x \end{aligned}\right..$$

Таким образом, система равносильна совокупности

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (2a-5)x + 2ay + 1 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \\ &\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (2a-5)x + 2ay + 1 = 0 \\ y = x \end{cases} \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &\begin{cases} ay^2 + 2ay + 6 - a = 0 \\ x = 1 \end{cases} \\ &\begin{cases} 2ax^2 + 5x + 1 = 0 \\ y = x \end{cases} \end{aligned}\right..$$

Совокупность имеет 4 решения, если каждая система совокупности имеет ровно 2 решения и при этом решения не совпадают.

При $a = -3$ решение первой системы — $(1;\, 1)$, $(1;\, -3)$, решение второй системы — $(1;\, 1)$, $\left(-\dfrac{1}{6};\, -\dfrac{1}{6}\right)$. То есть система имеет 3 решения, значит, такое значение параметра не удовлетворяет условию задачи.

Системы совокупности имеют 2 решения, если дискриминант квадратного уравнения положителен. Имеем:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ 4a^2 - 4a(6-a) > 0 \\ 25 - 8a > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \neq 0 \\ a(a-3) > 0 \\ a < \dfrac{25}{8} \end{cases} \iff a \in (-\infty;\, 0) \cup \left(3;\, \frac{25}{8}\right).$$

Окончательно получаем ответ:

$$a \in (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 0) \cup \left(3;\ \frac{25}{8}\right).$$

Ответ: $a \in (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 0) \cup \left(3;\ \dfrac{25}{8}\right)$.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = 2a - 7 \\ x^2 + y = |a - 3| \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

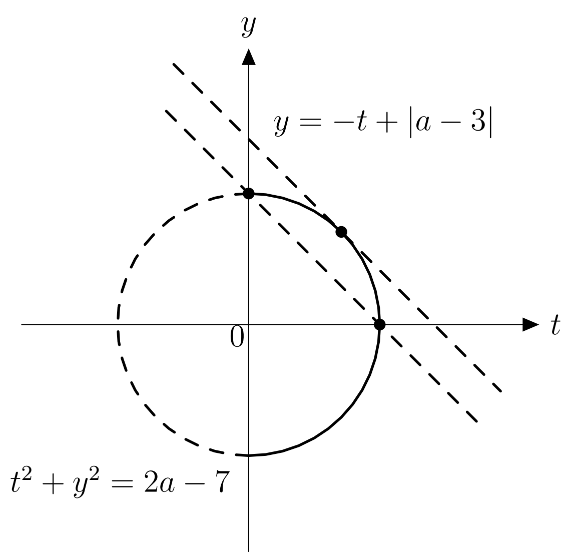
Решение. Значения параметра будем искать среди $a > \dfrac{7}{2}$. Обозначим $x^2 = t$, $t \geqslant 0$. Имеем систему:

$$\begin{cases} t^2 + y^2 = 2a - 7 \\ t + y = |a - 3| \\ t \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t^2 + y^2 = \left(\sqrt{2a-7}\right)^2 \\ y = -t + |a - 3| \\ t \geqslant 0 \end{cases}.$$

Уравнение $t^2 + y^2 = \left(\sqrt{2a-7}\right)^2$ задает окружность с центром в начале координат радиуса $R = \sqrt{2a-7}$.

Уравнение $y = -t + |a - 3|$ задает прямую, параллельную либо совпадающую с биссектрисой $y = -t$.

Очевидно, что исходная система будет иметь ровно 4 решения, если последняя система имеет ровно два положительных решения.



Ровно два положительных решения система имеет при

$$\begin{cases} |a - 3| > \sqrt{2a-7} \\ |a - 3| < \sqrt{2} \cdot \sqrt{2a-7} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - 8a + 16 > 0 \\ a^2 - 10a + 23 < 0 \end{cases} \iff a \in \left(5 - \sqrt{2};\ 4\right) \cup \left(4;\ 5 + \sqrt{2}\right).$$

Ответ: $a \in \left(5-\sqrt{2};\ 4\right) \cup \left(4;\ 5+\sqrt{2}\right)$.

Комментарий.

При решении задачи мы воспользовались формулой для нахождения расстояния от точки до прямой. Расстояние от точки $(0;\ 0)$ до прямой $y = -t + |a-3|$ равно

$$\rho = \frac{|a-3|}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, прямая $y = -t + |a-3|$ касается окружности при $R = \sqrt{2a-7} = \dfrac{|a-3|}{\sqrt{2}}$. Из этих соображений получено неравенство

$$|a-3| < \sqrt{2} \cdot \sqrt{2a-7}.$$

10. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 6a - 7 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. При $a = 0$ система не имеет решений. При $a \neq 0$ имеем:

$$\begin{cases} (x^2-y^2)(x^2+y^2) = 6a - 7 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \iff \begin{cases} a(x^2-y^2) = 6a - 7 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 6 - \dfrac{7}{a} \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}.$$

Складывая и вычитая уравнения системы, найдем

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{6a + a^2 - 7}{2a} \\ y^2 = \dfrac{a^2 - 6a + 7}{2a} \end{cases}.$$

Такая система будет иметь ровно 4 решения при

$$\begin{cases} \dfrac{6a + a^2 - 7}{2a} > 0 \\ \dfrac{a^2 - 6a + 7}{2a} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{(a+7)(a-1)}{a} > 0 \\ \dfrac{(a-3-\sqrt{2})(a-3+\sqrt{2})}{a} > 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff a \in \left(1;\ 3-2\sqrt{2}\right) \cup (3+2\sqrt{2};\ +\infty).$$

Ответ: $a \in \left(1;\ 3-2\sqrt{2}\right) \cup (3+2\sqrt{2};\ +\infty)$.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\sqrt{x+2a-1} + \sqrt{x-a} = 1$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+2a-1} + \sqrt{x-a}$. Такая функция монотонно возрастает как сумма возрастающих функций, а значит, наименьшее значение достигается либо в точке $x = -2a+1$, либо $x = a$.

Уравнение $f(x) = 1$ имеет хотя бы одно решение, если $f_{min}(x) \leqslant 1$. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} f(-2a+1) \leqslant 1 \\ f(a) \leqslant 1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{-3a+1} \leqslant 1 \\ \sqrt{3a-1} \leqslant 1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant -3a+1 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant 3a-1 \leqslant 1 \end{array}\right. \iff a \in \left[0;\, \frac{2}{3}\right].$$

Ответ: $a \in \left[0;\, \frac{2}{3}\right]$.

Комментарий.

А. При решении задачи мы учли тот факт, что наименьшее из двух чисел a и b меньше числа c тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел меньше c, то есть:

$$\min\{a,\, b\} < c \iff \left[\begin{array}{l} a < c \\ b < c \end{array}\right.$$

Аналогично

$$\min\{a,\, b\} > c \iff \begin{cases} a > c \\ b > c \end{cases}$$

$$\max\{a,\, b\} > c \iff \left[\begin{array}{l} a > c \\ b > c \end{array}\right.$$

$$\max\{a,\, b\} < c \iff \begin{cases} a < c \\ b < c \end{cases}.$$

Б. Сумма возрастающих функций является возрастающей. Действительно, если $h(x) = f(x) + g(x)$ и $f(x)$ и $g(x)$ – возрастающие функции, то

$$h'(x) = f'(x) + g'(x) > 0.$$

Аналогично произведение $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ положительных возрастающих функций также является возрастающей функцией, так как

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) > 0.$$

В. Приведем второе решение. Обозначим $x - a = t$. Тогда уравнение примет вид

$$\sqrt{t+3a-1} + \sqrt{t} = 1 \iff \begin{cases} t+3a-1 \geqslant 0 \\ t \geqslant 0 \\ t+3a-1+2\sqrt{t(t+3a-1)}+t = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} t \geqslant -3a+1 \\ t \geqslant 0 \\ 2\sqrt{t^2+3at-t} = -2t+2-3a \end{cases} \iff \begin{cases} t \geqslant -3a+1 \\ t \geqslant 0 \\ -2t+2-3a \geqslant 0 \\ 4(t^2+3at-t) = (-2t+2-3a)^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} t \geqslant -3a+1 \\ t \geqslant 0 \\ t \leqslant \dfrac{2-3a}{2} \\ t = \left(\dfrac{2-3a}{2}\right)^2 \end{cases} \iff a \in \left[0; \frac{2}{3}\right].$$

Г. Приведем еще одно решение. Обозначим $\sqrt{x+2a-1} = u$, $\sqrt{x-a} = v$, $u, v \geqslant 0$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} u+v = 1 \\ u^2 - v^2 = 3a-1 \end{cases} \iff \begin{cases} u+v = 1 \\ u-v = 3a-1 \end{cases} \iff \begin{cases} u = \dfrac{3a}{2} \\ v = \dfrac{2-3a}{2} \end{cases}.$$

Итак, решения будут при

$$\begin{cases} u \geqslant 0 \\ u \geqslant 0 \end{cases} \iff a \in \left[0; \frac{2}{3}\right].$$

12. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(4x-x^2)^2 - 32\sqrt{4x-x^2} = a^2 - 14a.$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Обозначим $t = \sqrt{4x-x^2} = \sqrt{4-(x-2)^2}$, $t \in [0; 2]$. Требуется найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$t^4 - 32t = a^2 - 14a$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[0; 2]$.

Рассмотрим функцию $f(t) = t^4 - 32t$ и исследуем ее с помощью производной на отрезке $[0; 2]$. Имеем:

$$f'(t) = 4t^3 - 32 = 4(t^3 - 8).$$

Очевидно, $f'(t) \leqslant 0$ на отрезке $[0; 2]$, то есть функция убывает, значит,

$$E(f) = [f(2);\ f(0)] = [-48; 0].$$

Уравнение $f(t) = a^2 - 14a$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0;\,2]$, если

$$a^2 - 14a \in E(f) \iff \begin{cases} a^2 - 14a \geqslant -48 \\ a^2 - 14a \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a-6)(a-8) \geqslant 0 \\ a(a-14) \leqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff a \in [0;\,6] \cup [8;\,14].$$

Ответ: $a \in [0;\,6] \cup [8;\,14]$.

13. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x + \frac{a^2}{x} + 1\right| + \left|x + \frac{a^2}{x} - 1\right| = 2$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Обозначим $x + \dfrac{a^2}{x} = t$. Имеем уравнение

$$|t+1| + |t-1| = 2 \iff t \in [-1;\,1].$$

Таким образом, получаем

$$-1 \leqslant x + \frac{a^2}{x} \leqslant 1 \iff \left|x + \frac{a^2}{x}\right| \leqslant 1 \iff \left|\frac{x^2+a^2}{x}\right| - 1 \leqslant 0 \iff \frac{|x^2+a^2| - |x|}{|x|} \leqslant 0 \iff$$

$$\frac{(x^2 - x + a^2)(x^2 + x + a^2)}{|x|} \leqslant 0 \iff \frac{\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + a^2 - \frac{1}{4}\right)}{|x|} \leqslant 0 \iff$$

$$\begin{cases} \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + a^2 - \frac{1}{4}\right) \leqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих системе неравенств в плоскости xOa. Решением является объединение двух кругов

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a^2 \leqslant \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + a^2 \leqslant \frac{1}{4}$$

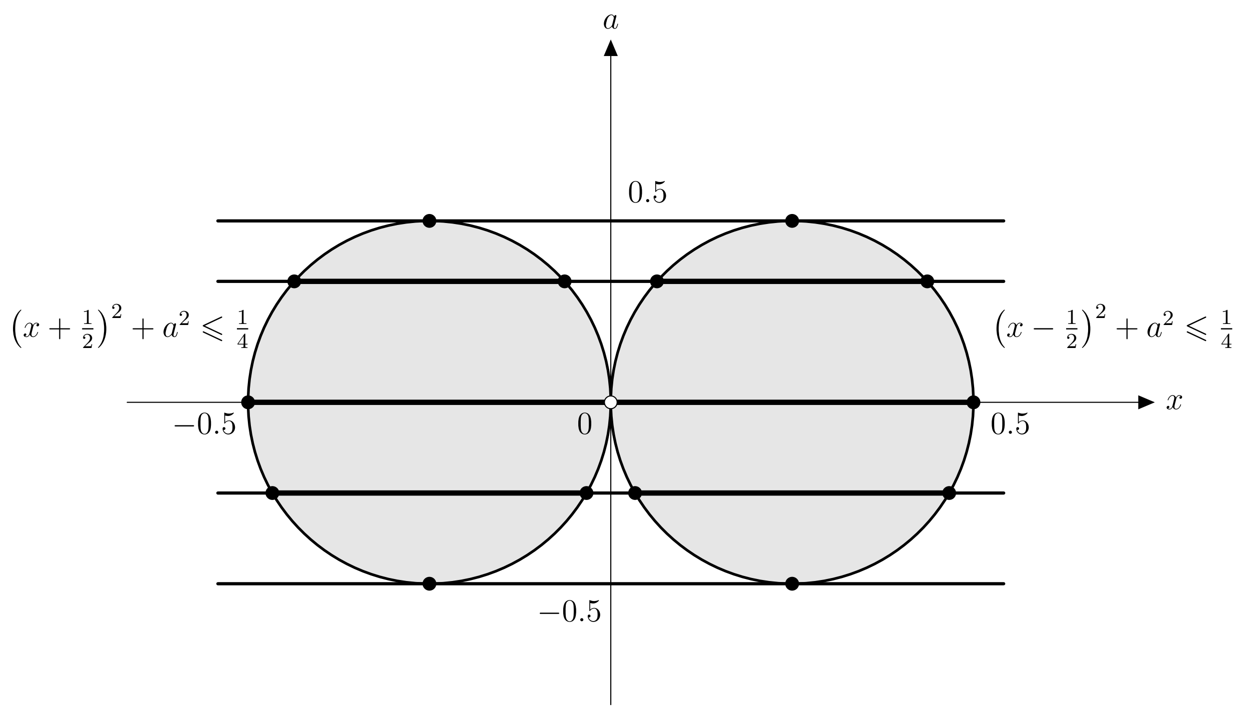
с выколотой точкой $(0;\,0)$.

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень при

$$a \in \left[-\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right].$$

Ответ: $a \in \left[-\dfrac{1}{2};\,\dfrac{1}{2}\right]$.

Комментарий.



Приведем другое решение. Итак, имеем неравенство

$$-1 \leqslant x+\frac{a^2}{x} \leqslant 1.$$

Очевидно, при $a=0$ получаем $x\in[-1;\,0)\cup(0;\,1]$, то есть значение $a=0$ удовлетворяет условию задачи.

При $a\neq 0$ рассмотрим функцию $f(x)=x+\dfrac{a^2}{x}$ и найдем ее множество значений. Имеем:

$$f'(x)=1-\frac{a^2}{x^2}=\frac{x^2-a^2}{x^2}.$$

Производная обращается в ноль в двух точках $x=\pm a$. При этом

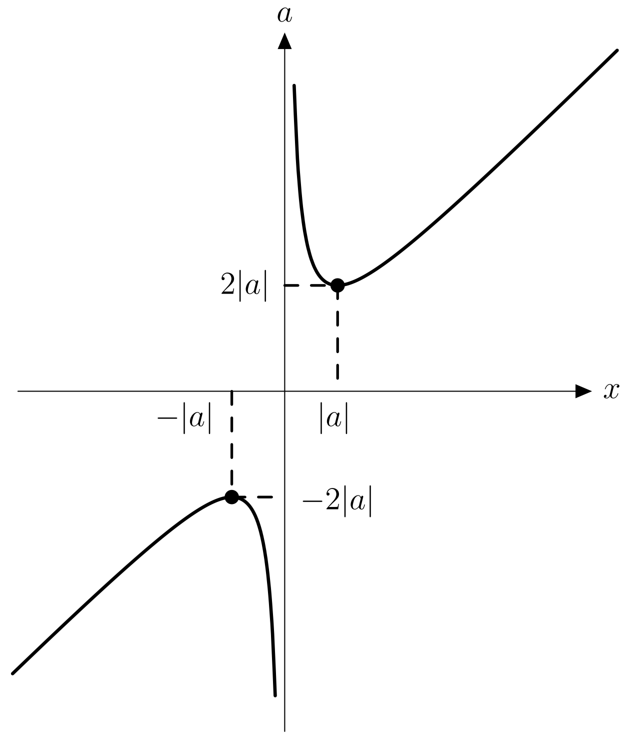
$$f(-a)=-a+\frac{a^2}{-a}=-2a,\ f(a)=a+\frac{a^2}{a}=2a.$$

Множеством значений функции является объединение промежутков

$$E(f)=(-\infty;\,-2|a|]\cup[2|a|;\,+\infty)\,.$$

Итак, уравнение имеет хотя бы одно решение при

$$2|a|\leqslant 1 \iff -\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}.$$



14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^2+6x+8}=\sqrt{a-3x}$$

имеет ровно один отрицательный корень.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+6x+8\geqslant 0 \\ x^2+6x+8=a-3x \end{cases} \iff \begin{cases} (x+4)(x+2)\geqslant 0 \\ a=x^2+9x+8 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leqslant -4 \\ x\geqslant -2 \end{array}\right. \\ a=x^2+9x+8 \end{cases}.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих системе неравенств, в плоскости xOa. Уравнение $a=x^2+9x+8$ задает параболу, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке $D\left(-\dfrac{9}{2};\,-\dfrac{49}{4}\right)$.

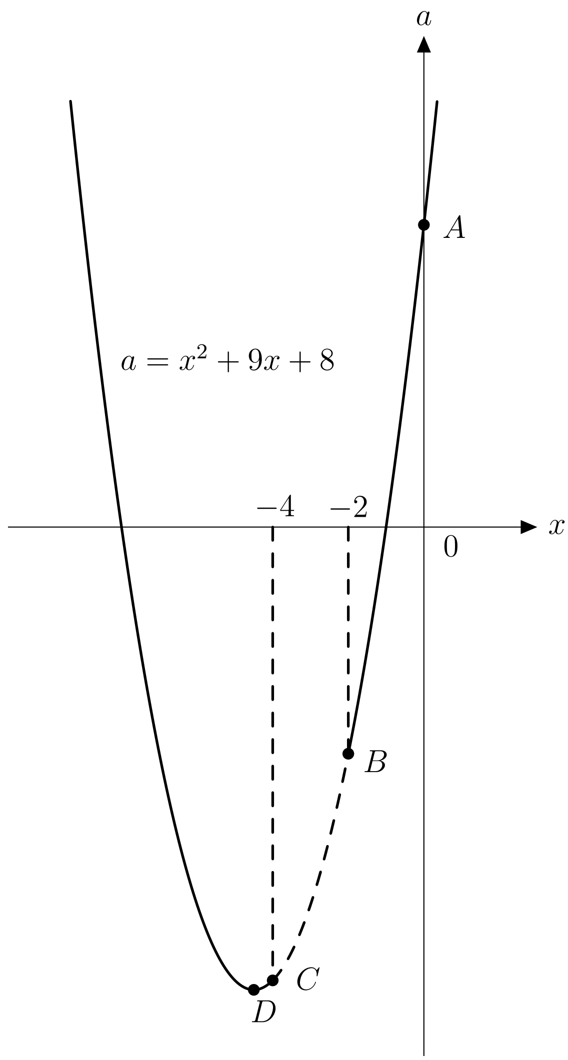
Точки A, B, C, D имеют координаты

$$A(0;\,8),\ B(-2;\,-6),\ C(-4;\,-12),\ D\left(-\frac{9}{2};\,-\frac{49}{4}\right).$$

Итак, уравнение имеет ровно один отрицательный корень при

$$a\in\left\{-\frac{49}{4}\right\}\cup(-12;\,-6)\cup[8;\,+\infty).$$

Ответ: $a\in\left\{-\dfrac{49}{4}\right\}\cup(-12;\,-6)\cup[8;\,+\infty)$.



Комментарий.

Приведем аналитическое решение. Имеем:

$$\begin{cases} x^2+6x+8 \geqslant 0 \\ x^2+6x+8 = a-3x \end{cases} \iff \begin{cases} (x+4)(x+2) \geqslant 0 \\ x^2+9x+8-a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -4 \\ x \geqslant -2 \end{array}\right. \\ x^2+9x+8-a=0 \end{cases}.$$

Дискриминант квадратного уравнения $D = 4a + 49$. Рассмотрим два случая:

1) $D = 0 \iff a = -\dfrac{49}{4}$, тогда $x = -4.5 \in (-\infty;\ -4] \cup [-2;\ +\infty)$;

2) $D > 0 \iff a > -\dfrac{49}{4}$, тогда квадратное уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-9-\sqrt{4a+49}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-9+\sqrt{4a+49}}{2}.$$

Так как корень $x_1 < -4.5$, то $x_1 \in (-\infty;\ -4] \cup [-2;\ +\infty)$, поэтому исходное уравнение имеет ровно один отрицательный корень в двух случаях:

$$\left[\begin{array}{l} -4 < x_2 < -2 \\ x_2 \geqslant 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} -4 < \dfrac{-9+\sqrt{4a+49}}{2} < -2 \\ \dfrac{-9+\sqrt{4a+49}}{2} \geqslant 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 1 < \sqrt{4a+49} < 5 \\ \sqrt{4a+49} \geqslant 9 \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 1 < 4a+49 < 25 \\ 4a+49 \geqslant 81 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} -12 < a < -6 \\ a \geqslant 8 \end{array}\right. .$$

Итак, $a \in \left\{-\dfrac{49}{4}\right\} \cup (-12;\ -6) \cup [8;\ +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x-7)^2+y^2-a^2)\ln(9-x^2-y^2)=0 \\ ((x-7)^2+y^2-a^2)(x+y-a+7)=0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

Ответ: $a \in (3;\,4] \cup [10;\,11)$.

16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (y+x-a)\sqrt{6x-x^2-y^2}=0 \\ (y+x-a)(x^2+(y+4)^2-a^2)=0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

Ответ: $a \in (-8;\,-2) \cup (3+3\sqrt{2};\,8)$.

17. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(a-3)x-4ay+5a^2-6a=0 \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2+ay^2-(4a-6)x+4ay+1=0 \\ x^2+y=xy+x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $a < -\frac{7}{2}; -\frac{7}{2} < a < 0; 1 < a < \frac{9}{2}$.

19. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2+ay^2-(2a-5)x+2ay+1=0 \\ x^2+y=xy+x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $a < -3; -3 < a < 0; 3 < a < \frac{25}{8}$.

20. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2+ay^2+2ax+(a+2)y+1=0 \\ xy+1=x+y \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

21. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (2a-5)x + 2ay + 1 = 0 \\ x^2 + y = xy + x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup \left(3; \dfrac{25}{8}\right)$.

22. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(a-3)x - 4ay + 5a^2 - 6a = 0 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

23. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4ax + 6x - (2a+2)y + 5a^2 - 10a = -1 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

24. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(a-3)x - 4ay + 5a^2 - 6a = 0 \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

25. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 12a - 28 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

26. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 10a - 24 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $(2; 4) \cup (6; +\infty)$.

27. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y = |4a - 3| \end{cases}$$

уравнений имеет ровно четыре различных решения.

28. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y = |2a - 4| \end{cases}$$

уравнений имеет ровно четыре различных решения.

29. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - a + 4)^2 + (y - 3a)^2 = 16, \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

30. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 2a - 2)^2 + (y - a)^2 = 1 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{3}; -1\right) \cup (-1; -0.6) \cup (-0.6; \sqrt{2} - 2)$.

31. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - (3 - a))^2 + (y - 2a)^2 = 9 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

32. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x + ay - 5)(x + ay - 5a) = 0 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

33. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x + ay - 7)(x + ay + 7a) = 0 \\ x^2 + y^2 = 45 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

34. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = (a+2)x^2 - 2ax + a - 2 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

35. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = (a-2)x^2 - 2ax - 2 + a \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $(-4.25; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4.25)$.

36. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(2x - x^2)^2 - 4\sqrt{2x - x^2} = a^2 - 4a.$$

имеет хотя бы один корень.

Ответ: ?.

37. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^2 + 6x + 5} = \sqrt{a - 6x}$$

имеет ровно один отрицательный корень.

Глава 2

Образцы заданий 2017 года

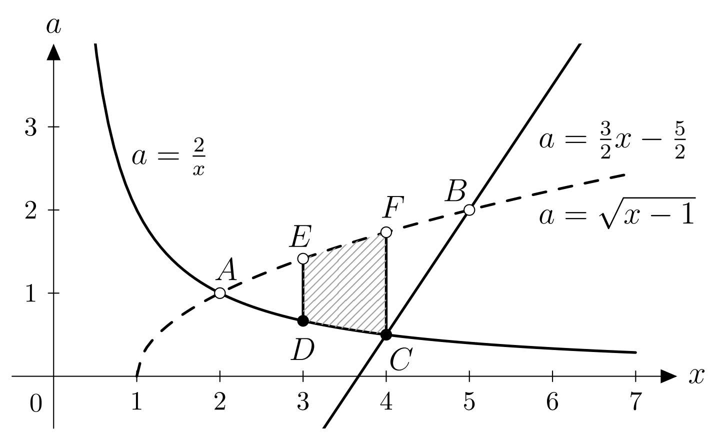
1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geqslant 2 \\ \sqrt{x-1} > a \\ 3x \leqslant 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3;\, 4]$.

Решение. Заметим, что $a > 0$, иначе из первого неравенства системы следует отсутствие решений на отрезке $[3;\, 4]$.

Изобразим множество точек, удовлетворяющих системе неравенств в плоскости xOa. Гипербола $ax = 2$ пересекается с графиком корня $a = \sqrt{x-1}$ в точке $A(2;\, 1)$, а с прямой $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$ — в точке $C\left(4;\, \dfrac{1}{2}\right)$. График корня пересекается с прямой в точке $B(5;\, 2)$.



Учитывая знаки неравенств системы, получаем, что множество точек, координаты которых удовлетворяют системе, представляет собой криволинейный треугольник ABC.

Точки D, E, F имеют координаты

$$D\left(3;\, \frac{2}{3}\right),\ E\left(3;\, \sqrt{2}\right),\ F\left(4;\, \sqrt{3}\right)$$

Из рисунка видно, что система имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3;\, 4]$, если значение параметра a находится между ординатой точки C включительно и F невключительно, то есть $a \in \left[\dfrac{1}{2};\, \sqrt{3}\right)$.

Ответ: $a \in \left[\dfrac{1}{2};\, \sqrt{3}\right)$.

Комментарий.

А. Приведем аналитическое решение задачи.

Так как $a > 0$, то запишем систему неравенств в виде

$$\begin{cases} ax \geqslant 2 \\ \sqrt{x-1} > a \\ 3x \leqslant 2a+11 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{a} \\ x > a^2+1 \\ x \leqslant \dfrac{2a+11}{3} \end{cases}$$

Заметим, что $\dfrac{2}{a} = a^2+1 \iff a=1$, и рассмотрим три случая.

1) Если $a=1$, то решением системы является полуинтервал $\left(1;\ \dfrac{13}{3}\right]$, который имеет общие точки с отрезком $[3;\ 4]$.

2) Если $0 < a < 1$, то $\dfrac{2}{a} > a^2+1$ и решением системы неравенств будет отрезок $\left[\dfrac{2}{a};\ \dfrac{2a+11}{3}\right]$. Такой отрезок существует при

$$\frac{2}{a} < \frac{2a+11}{3} \iff 2a^2+11a-6>0 \overset{a>0}{\iff} a > \frac{1}{2}$$

и пересекается с отрезком $[3;\ 4]$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \dfrac{2a+11}{3} > 3 \\ \dfrac{2}{a} < 4 \end{cases} \iff a > \frac{1}{2}.$$

При $a = \dfrac{1}{2}$ отрезок вырождается в точку и система имеет единственное решение $x=4$, принадлежащее отрезку $[3;\ 4]$.

3) Если $a > 1$, то $\dfrac{2}{a} < a^2+1$ и решением системы неравенств будет полуинтервал $\left(a^2+1;\ \dfrac{2a+11}{3}\right]$. Такой полуинтервал существует при

$$a^2+1 < \frac{2a+11}{3} \iff 3a^2-2a-8<0 \overset{a>1}{\iff} 1<a<2$$

и пересекается с отрезком $[3;\ 4]$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \dfrac{2a+11}{3} > 3 \\ a^2+1 < 4 \end{cases} \overset{a>1}{\iff} 1 < a < \sqrt{3}$$

Объединяя все рассмотренные случаи, находим $a \in \left[\dfrac{1}{2};\ \sqrt{3}\right)$.

Б. При решении уравнения $\dfrac{2}{a} = a^2+1$ мы сразу указали корень уравнения. Этого достаточно, так как решение такого уравнения является лишь вспомогательным шагом, тем более что оно решается достаточно легко:

$$\frac{2}{a} = a^2+1 \iff a^3+a-2=0 \iff (a-1)(a^2+a+2)=0 \iff a=1.$$

Также можно было нарисовать эскизы графиков функций $y = x^2 + 1$, $y = \dfrac{2}{x}$, чтобы убедиться, что существует единственное решение.

С. При аналитическом решении задачи мы учли, что два отрезка $[a;\, b]$ и $[c;\, d]$ пересекаются тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} d > a \\ c < b \end{cases}$$

Аналогично:

- Отрезки $[a;\, b]$ и $[c;\, d]$ не пересекаются тогда и только тогда, когда

$$\left[\begin{array}{l} b < c \\ a > d \end{array}\right.,$$

- Отрезок $[a;\, b]$ вложен в отрезок $[c;\, d]$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > c \\ b < d \end{cases}.$$

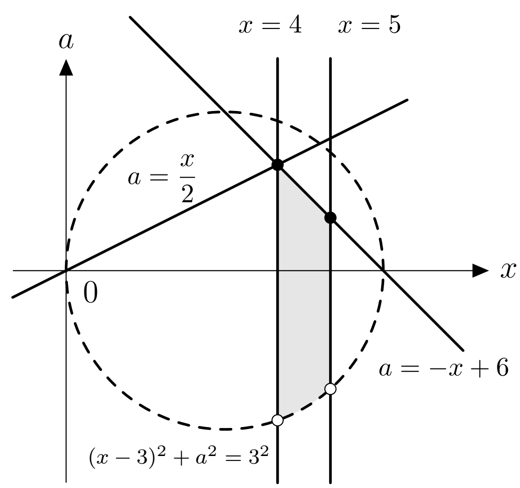
2. Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 2a \leqslant x \\ 6x > x^2 + a^2 \\ x + a \leqslant 6 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4; 5]$.

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} a \leqslant \dfrac{x}{2} \\ (x-3)^2 + a^2 < 3^2 \\ a \leqslant -x + 6 \end{cases}$$



и изобразим множество точек, удовлетворяющих системе неравенств в плоскости xOa.

Прямые $a = \dfrac{x}{2}$ и $a = -x + 6$ пересекаются в точке $A(4;\, 2)$. Нижняя точка пересечения прямой $x = 4$ и окружности имеет координаты $B(4;\, -\sqrt{8})$.

Итак, система имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4;\, 5]$ при $a \in (-\sqrt{8};\, 2]$.

Ответ: $a \in (-\sqrt{8};\, 2]$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |a| \leqslant 4 \\ x^2 + 8x < 16a + 48 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-1;\ 0]$.

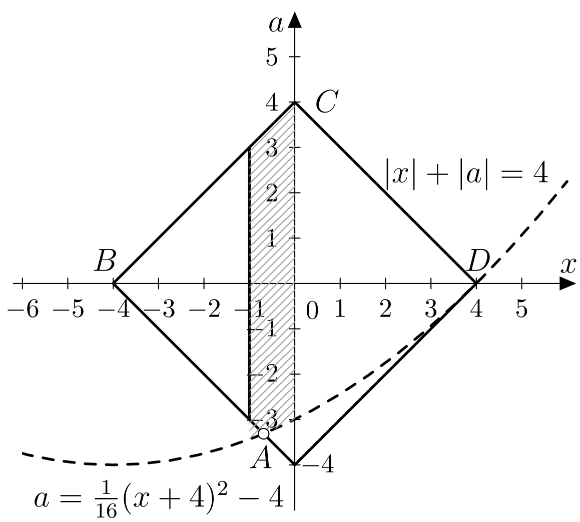
Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} |x| + |a| \leqslant 4 \\ a > \dfrac{1}{16}(x+4)^2 - 4 \end{cases}$$

и изобразим множество точек, удовлетворяющих системе неравенств в плоскости xOa.

Уравнение $|x| + |a| = 4$ задает квадрат. Графиком функции $a = \dfrac{1}{16}(x+4)^2 - 4$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке $(-4;\ -4)$.

Учитывая знаки неравенств системы, получаем, что множество точек, координаты которых удовлетворяют системе, представляет из себя область $ABCD$.



Для нахождения координат точки A решим систему

$$\begin{cases} -x - a = 4 \\ x^2 + 8x = 16a + 48 \end{cases} \iff \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 = -12 - 8\sqrt{2} \\ a_1 = 8 + 8\sqrt{2} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = -12 + 8\sqrt{2} \\ a_2 = 8 - 8\sqrt{2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Очевидно, координаты точек A и C имеют вид $A(-12 + 8\sqrt{2};\ 8 - 8\sqrt{2})$, $C(0;\ 4)$.

Из рисунка видно, что система имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-1;\ 0]$, если значение параметра a находится между ординатой точки A невключительно и C включительно, то есть $a \in \big(8 - 8\sqrt{2};\ 4\big]$.

Ответ: $a \in \big(8 - 8\sqrt{2};\ 4\big]$.

Комментарий.

А. При решении задачи мы воспользовались тем, что уравнение $|x| + |y| = 4$ задает квадрат. Обобщенное уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{|x - x_1|}{a} + \frac{|y - y_1|}{b} = 1.$$

Оно задает ромб с центром в точке $(x_1;\, y_1)$, диагонали которого параллельны либо совпадают с осями координат и равны $2a$ и $2b$. При $a = b$ ромб вырождается в квадрат. Очевидно, при $x_1 = y_1 = 0$ диагонали ромба лежат на осях координат.

4. Найдите все значения a, при каждом из которых система

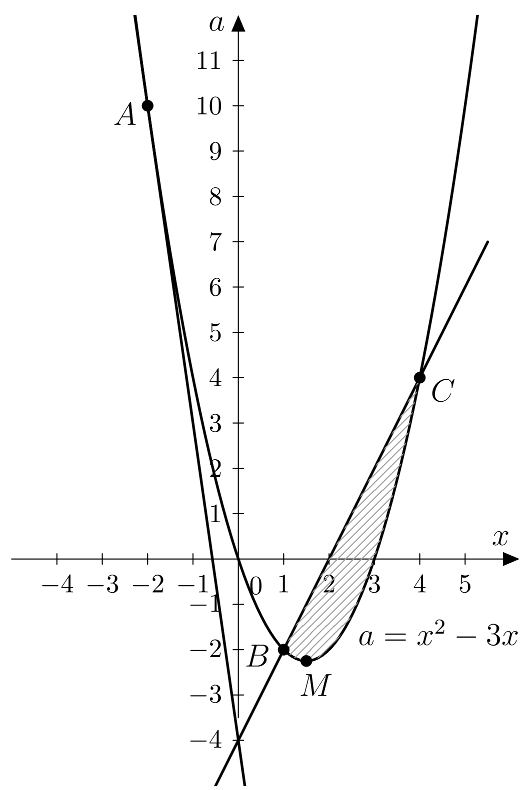
$$\begin{cases} (a + 7x + 4)(a - 2x + 4) \leqslant 0 \\ a + 3x \geqslant x^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (a + 7x + 4)(a - 2x + 4) \leqslant 0 \\ a \geqslant x^2 - 3x \end{cases}$$

и изобразим множество точек, удовлетворяющих системе неравенств в плоскости xOa. Искомое множество является пересечением части плоскости, лежащей внутри параболы, заданной уравнением $a = x^2 - 3x$, и двух тупых углов, ограниченных прямыми $a = -7x - 4$ и $a = 2x - 4$, а также точки, в которой прямая $a = -7x - 4$ касается параболы.



Координаты точек A, B, C найдем, решив уравнения $x^2 - 3x = 2x - 4$ и $x^2 - 3x = -7x - 4$.

Имеем: $A(-2;\, 10)$, $B(1;\, -2)$, $C(4;\, 4)$.

Из рисунка следует, что система имеет решения для всех a, лежащих выше ординаты вершины параболы $M\left(\dfrac{3}{2};\, -\dfrac{9}{4}\right)$, но ниже ординаты точки C, а также при $a = 10$. Итак, $a \in \left[-\dfrac{9}{4};\, 4\right] \cup \{10\}$.

Ответ: $a \in \left[-\dfrac{9}{4};\, 4\right] \cup \{10\}$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\operatorname{tg}(\pi x) \ln(x + a) = \ln(x + a)$$

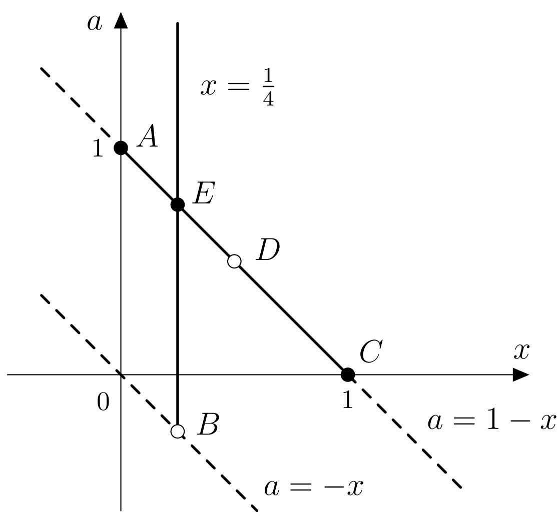
имеет ровно один корень на отрезке $[0;\, 1]$.

Решение. Перенесем правую часть налево и вынесем общий множитель за скобку:

$$\operatorname{tg}(\pi x)\ln(x+a)=\ln(x+a) \iff \ln(x+a)\,(\operatorname{tg}(\pi x)-1)=0 \iff \begin{cases} x+a>0 \\ \cos(\pi x)\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \ln(x+a)=0 \\ \operatorname{tg}(\pi x)=1 \end{array}\right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a>-x \\ \pi x\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} x+a=1 \\ \pi x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} a>-x \\ x\neq \dfrac{1}{2}+n,\ n\in\mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} a=1-x \\ x=\dfrac{1}{4}+\ k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \end{cases} \overset{x\in[0;\,1]}{\iff} \begin{cases} a>-x \\ x\neq \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} a=1-x \\ x=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases}$$

Изобразим множество решений последней системы на отрезке [0; 1] в плоскости xOa.



Искомое множество задает отрезок AC с выколотой точкой D и открытый луч BE. Точки A, B, C, D, E имееют следующие координаты:

$$A(0;\,1),\ B\left(\frac{1}{4};\,-\frac{1}{4}\right),\ C(1;\,0),\ D\left(\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right),\ E\left(\frac{1}{4};\,\frac{3}{4}\right).$$

Система, а вместе с ней и исходное уравнение имеет единственное решение на отрезке [0; 1] при $a\in\left(-\dfrac{1}{4};\,0\right)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\cup\left\{\dfrac{3}{4}\right\}\cup(1;\,+\infty)$.

Ответ: $a\in\left(-\dfrac{1}{4};\,0\right)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\cup\left\{\dfrac{3}{4}\right\}\cup(1;\,+\infty)$.

Комментарий.

А. Приведем аналитическое решение задачи.

$$\operatorname{tg}(\pi x)\ln(x+a)=\ln(x+a)\overset{x\in[0;\,1]}{\Longleftrightarrow}\begin{cases} x>-a\\ x\neq\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l} x=1-a\\ x=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\end{cases}$$

1) Число $x=1-a$ принадлежит отрезку $[0;\,1]$ при $a\in[0;\,1]$ и является корнем уравнения, если удовлетворяет условию $x\neq\dfrac{1}{2}$, то есть $a\neq\dfrac{1}{2}$.

2) Число $x=\dfrac{1}{4}\in[0;\,1]$ и является корнем уравнения, если удовлетворяет условию $x>-a$, то есть $\dfrac{1}{4}>-a$, откуда $a>-\dfrac{1}{4}$.

3) Корни $x=1-a$ и $x=\dfrac{1}{4}$ совпадают при $a=\dfrac{3}{4}$.

Таким образом, уравнение имеет ровно одно решение на отрезке $[0;\,1]$ при $a\in\left(-\dfrac{1}{4};\,0\right)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\cup\left\{\dfrac{3}{4}\right\}\cup(1;\,+\infty)$.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-a}\cdot\sin x=-\sqrt{x-a}\cdot\cos x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,\pi]$.

Решение. Перенесем правую часть налево и вынесем общий множитель за скобку:

$$\sqrt{x-a}\cdot\sin x=-\sqrt{x-a}\cdot\cos x\iff\sqrt{x-a}\,(\sin x+\cos x)=0\iff$$

$$\iff\begin{cases} x-a\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l} x-a=0\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right.\end{cases}\iff\begin{cases} a\leqslant x\\ \left[\begin{array}{l} a=x\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{cases}\overset{x\in[0;\,\pi]}{\Longleftrightarrow}\begin{cases} a\leqslant x\\ \left[\begin{array}{l} a=x\\ x=\dfrac{3\pi}{4}\end{array}\right.\end{cases}$$

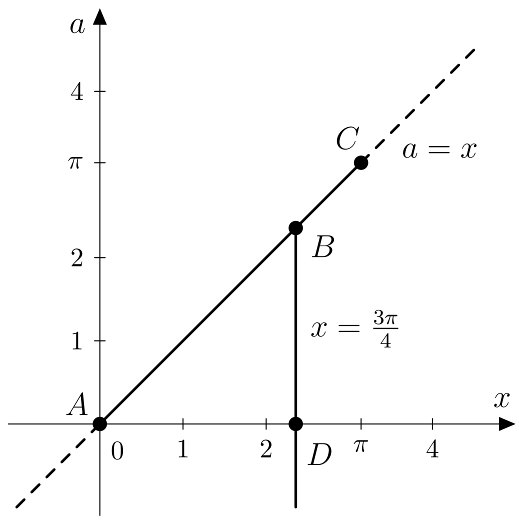
Изобразим множество решений последней системы на отрезке $[0;\,1]$ в плоскости xOa. Искомое множество задает отрезок AC и луч BD. Точки A, B, C имеют координаты

$$A(0;\,0),\ B\left(\frac{3\pi}{4};\,\frac{3\pi}{4}\right),\ C(\pi;\,\pi).$$

Последняя система, а вместе с ней и исходное уравнение имеет единственное решение на отрезке $[0;\,\pi]$ при $a\in(-\infty;\,0)\cup\left[\dfrac{3\pi}{4};\,\pi\right]$.

Ответ: $a\in(-\infty;\,0)\cup\left[\dfrac{3\pi}{4};\,\pi\right]$.

Комментарий.



А. Приведем аналитическое решение задачи.

$$\sqrt{x-a}\cdot\sin x = -\sqrt{x-a}\cdot\cos x \iff \overset{x\in[0;\,\pi]}{\iff} \begin{cases} x \geqslant a \\ \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = \dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right. \end{cases}$$

1) Число $x = a$ принадлежит отрезку $[0;\,\pi]$ при $a \in [0;\,\pi]$.

2) Число $x = \dfrac{3\pi}{4} \in [0;\,\pi]$ и является корнем уравнения, если удовлетворяет условию $x \geqslant a$, то есть $a \leqslant \dfrac{3\pi}{4}$.

3) Корни уравнения $x = a$ и $x = \dfrac{3\pi}{4}$ совпадают при $a = \dfrac{3\pi}{4}$.

Итак, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$ при $a \in (-\infty;\,0) \cup \left[\dfrac{3\pi}{4};\,\pi\right]$.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (x-1)\sqrt{3x-a} = x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$.

Решение. Перенесем правую часть налево и вынесем общий множитель за скобку:

$$x^2 + (x-1)\sqrt{3x-a} = x \iff (x-1)\left(x+\sqrt{3x-a}\right) = 0 \iff \begin{cases} 3x \geqslant a \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \sqrt{3x-a} = -x \end{array}\right. \end{cases}$$

1) Число $x = 1 \in [0;\,1]$ и является корнем уравнения, если удовлетворяет условию $3x \geqslant a$, то есть $a \leqslant 3$.

2) Уравнение $\sqrt{3x-a} = -x$ имеет корень на отрезке $[0;\,1]$ только если $x = 0$ при $a = 0$.

Итак, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$ при $a \in (-\infty;\,0) \cup (0;\,3]$.

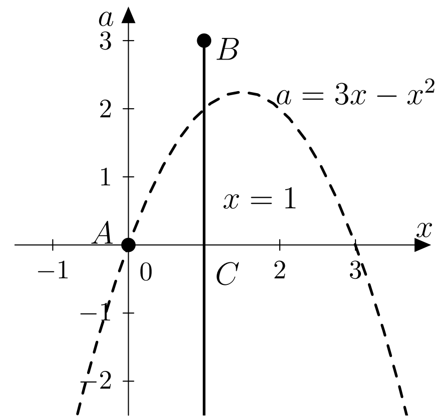
Ответ: $a \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 3]$.

Комментарий.

А. Приведем графическое решение задачи:

$$(x-1)\left(x+\sqrt{3x-a}\right)=0 \iff \begin{cases} 3x-a \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{3x-a}=-x \end{array}\right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a \leqslant 3x \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x \leqslant 0 \\ 3x-a=x^2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} a \leqslant 3x \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x \leqslant 0 \\ a=3x-x^2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$



Изобразим множество решений последней системы на отрезке $[0;\ 1]$ в плоскости xOa.

Искомое множество задает луч BC и точку A. Точки A и B имеют координаты

$$A(0;\ 0),\ B(1;\ 3).$$

Последняя система, а вместе с ней и исходное уравнение имеет единственное решение на отрезке $[0;\ 1]$ при $a \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 3]$.

8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x-3}\cdot\ln(3x-a)=\sqrt{5x-3}\cdot\ln(4x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

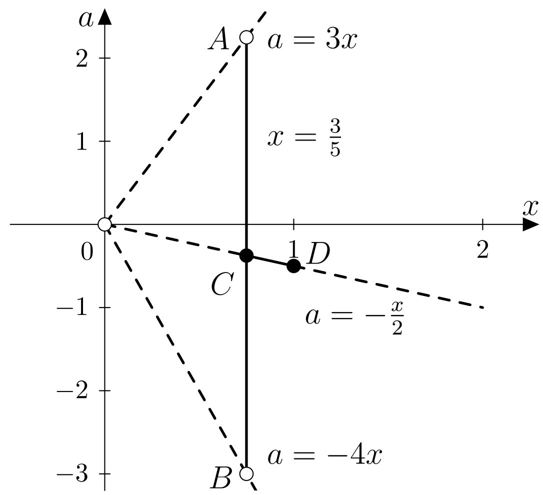
Решение. Перенесем правую часть влево и вынесем общий множитель за скобку:

$$\sqrt{5x-3}\cdot\ln(3x-a)=\sqrt{5x-3}\cdot\ln(4x+a) \iff \sqrt{5x-3}\cdot(\ln(3x-a)-\ln(4x+a))=0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 5x-3 \geqslant 0 \\ 3x-a>0 \\ 4x+a>0 \\ \left[\begin{array}{l} 5x-3=0 \\ \ln(3x-a)=\ln(4x+a) \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant \dfrac{3}{5} \\ a<3x \\ a>-4x \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{5} \\ 3x-a=4x+a \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant \dfrac{3}{5} \\ a<3x \\ a>-4x \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{5} \\ a=-\dfrac{x}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

Изобразим множество решений последней системы на отрезке $[0;\ 1]$ в плоскости xOa.
Точки A, B, C, D имеют координаты

$$A\left(\frac{3}{4};\ \frac{9}{4}\right),\ B\left(\frac{3}{4};\ -3\right),\ C\left(\frac{3}{4};\ -\frac{3}{8}\right),\ D\left(1;\ -\frac{1}{2}\right).$$



Последняя система, а вместе с ней и исходное уравнение имеет единственное решение на отрезке $[0;\,1]$ при $a \in \left(-3;\,-\dfrac{1}{2}\right) \cup \left[-\dfrac{3}{8};\,\dfrac{9}{4}\right)$.

Ответ: $a \in \left(-3;\,-\dfrac{1}{2}\right) \cup \left[-\dfrac{3}{8};\,\dfrac{9}{4}\right)$.

Комментарий.

А. Приведем аналитическое решение задачи.

$$\sqrt{5x-3}\cdot\ln(3x-a) = \sqrt{5x-3}\cdot\ln(4x+a) \iff \begin{cases} x \geqslant \dfrac{3}{5} \\ a < 3x \\ a > -4x \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{5} \\ x = -2a \end{array}\right. \end{cases}$$

1) Число $x = \dfrac{3}{5} \in [0;\,1]$ и является корнем уравнения, если удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} a < 3x \\ a > -4x \end{cases} \iff \begin{cases} a < \dfrac{9}{5} \\ a > -\dfrac{12}{5} \end{cases}$$

2) Число $x = -2a$ принадлежит отрезку $[0;\,1]$ при $a \in \left[-\dfrac{1}{2};\,0\right]$ и является корнем уравнения, если удовлетворяет условию $x \geqslant \dfrac{3}{5}$, откуда $a \in \left(-\infty;\,-\dfrac{3}{10}\right]$. Значит, $a \in \left[-\dfrac{1}{2};\,-\dfrac{3}{10}\right]$.

3) Корни $x = \dfrac{3}{5}$ и $x = -2a$ совпадают при $a = -\dfrac{3}{10}$.

Итак, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$ при $a \in \left(3;\,-\dfrac{1}{2}\right) \cup \left[-\dfrac{3}{8};\,\dfrac{9}{4}\right)$.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

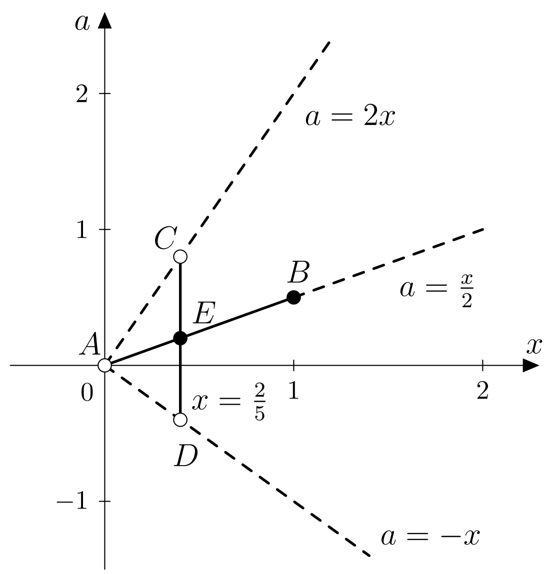
$$(5x-2)\cdot\ln(x+a)=(5x-2)\cdot\ln(2x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$.

Решение. Перенесем правую часть влево и вынесем общий множитель за скобку:

$$(5x-2)\cdot\ln(x+a)=(5x-2)\cdot\ln(2x-a)\iff(5x-2)\cdot(\ln(x+a)-\ln(2x-a))=0\iff$$

$$\iff\begin{cases}x+a>0\\2x-a>0\\\left[\begin{array}{l}5x-2=0\\\ln(x+a)=\ln(2x-a)\end{array}\right.\end{cases}\iff\begin{cases}a>-x\\a<2x\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{5}\\x+a=2x-a\end{array}\right.\end{cases}\iff\begin{cases}a>-x\\a<2x\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{5}\\a=\dfrac{x}{2}\end{array}\right.\end{cases}$$



Изобразим множество решений последней системы на отрезке $[0;\,1]$ в плоскости xOa.

Искомое множество задает полуинтервал AB с проколотой точкой A и интервал CD. Точки A, B, C, D, E имеют координаты

$$A\,(0;\,0)\,,\;B\left(1;\,\frac{1}{2}\right),\;C\left(\frac{2}{5};\,\frac{4}{5}\right),\;D\left(\frac{2}{5};\,-\frac{2}{5}\right),\;E\left(\frac{2}{5},\,\frac{1}{5}\right).$$

Последняя система, а вместе с ней и исходное уравнение имеет единственное решение на отрезке $[0;\,1]$ при $a\in\left(-\dfrac{2}{5};\,0\right]\cup\left\{\dfrac{1}{5}\right\}\cup\left(\dfrac{1}{2};\,\dfrac{4}{5}\right)$.

Ответ: $a\in\left(-\dfrac{2}{5};\,0\right]\cup\left\{\dfrac{1}{5}\right\}\cup\left(\dfrac{1}{2};\,\dfrac{4}{5}\right)$.

10. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\ln(3a-x)\cdot\ln(2x+2a-5)=\ln(3a-x)\cdot\ln(x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,2]$.

Решение. Перенесем правую часть влево и вынесем общий множитель за скобку:

$$\ln(3a-x)\cdot(\ln(2x+2a-5)-\ln(x-a))=0 \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+2a-5>0\\ x-a>0\\ \ln(3a-x)=0\end{cases}\\ \begin{cases}3a-x>0\\ \ln(2x+2a-5)-\ln(x-a)=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+2a-5>0\\ x-a>0\\ 3a-x=1\end{cases}\\ \begin{cases}3a-x>0\\ x-a>0\\ 2x+2a-5=x-a\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+2a-5>0\\ x-a>0\\ x=3a-1\end{cases}\\ \begin{cases}3a-x>0\\ x-a>0\\ x=5-3a\end{cases}\end{array}\right.$$

1) Число $x=3a-1$ принадлежит отрезку $[0;\,2]$ при $a\in\left[\frac{1}{3};\,1\right]$ и является корнем уравнения, если удовлетворяет условиям

$$\begin{cases}2x+2a-5>0\\ x-a>0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}2(3a-1)+2a-5>0\\ 3a-1-a>0\end{cases} \Longrightarrow a>\frac{7}{8}$$

Таким образом, $a\in\left(\frac{7}{8};\,1\right]$.

2) Число $x=5-3a$ принадлежит отрезку $[0;\,2]$ при $a\in\left[1;\,\frac{5}{3}\right]$ и является корнем уравнения, если удовлетворяет условиям

$$\begin{cases}3a-x>0>0\\ x-a>0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}3a-(5-3a)>0\\ 5-3a-a>0\end{cases} \Longrightarrow a\in\left(\frac{5}{6};\,\frac{5}{4}\right)$$

Таким образом, $a\in\left[1;\,\frac{5}{4}\right)$.

3) Корни $x=3a-1$ и $x=5-3a$ совпадают при $a=1$ и равны $x=2\in[0;\,2]$.

Таким образом, уравнение имеет ровно одно решение на отрезке $[0;\,2]$ при $a\in\left(\frac{7}{8};\,\frac{5}{4}\right)$.

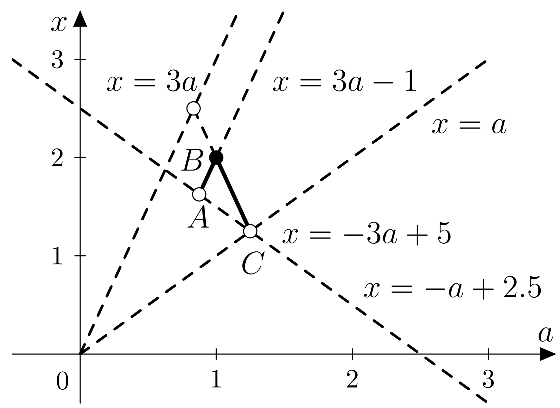
Ответ: $a\in\left(\frac{7}{8};\,\frac{5}{4}\right)$.

Комментарий.

А. Приведем графическое решение задачи.

$$\ln(3a-x)\left(\ln(2x+2a-5)-\ln(x-a)\right)=0$$

$$\iff \begin{cases} 3a-x>0 \\ 2x+2a-5>0 \\ x-a>0 \\ \left[\begin{array}{l} \ln(3a-x)=0 \\ \ln(2x+2a-5)=\ln(x-a) \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x<3a \\ x>-a+2.5 \\ x>a \\ \left[\begin{array}{l} x=3a-1 \\ 2x+2a-5=x-a \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x<3a \\ x>-a+2.5 \\ x>a \\ \left[\begin{array}{l} x=3a-1 \\ x=-3a+5 \end{array}\right. \end{cases}$$



Изобразим множество решений последней системы на отрезке $[0;\,2]$ в плоскости aOx. Точки A, B, C имеют координаты

$$A\left(\frac{7}{8};\,\frac{13}{8}\right),\ B\,(1;\,2)\,,\ C\left(\frac{5}{4};\,\frac{5}{4}\right).$$

Последняя система, а вместе с ней и исходное уравнение имеет единственное решение на отрезке $[0;\,2]$, если значение параметра a находится между абсциссами точек A и C невключительно, то есть при $a\in\left(\frac{7}{8};\,\frac{5}{4}\right)$.

Б. Мы ввели систему координат aOx вместо привычной нам xOa. Сделано это было ввиду того, что в системе aOx значения угловых коэффициентов являются целыми числами. При таком вводе системы значения параметра находятся путем сканирования оси абсцисс вертикальной прямой вместо сканирования оси ординат горизонтальной прямой.

11. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

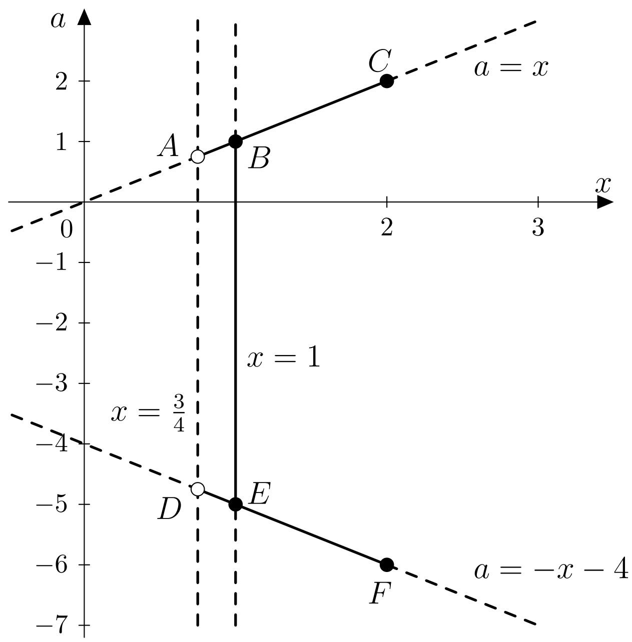
$$\ln(4x-3)\cdot\sqrt{x^2+4x-4a-a^2}=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,2]$.

Решение. Имеем:

$$\ln(4x-3)\cdot\sqrt{x^2+4x-4a-a^2}=0 \iff \begin{cases} 4x-3>0 \\ x^2+4x-4a-a^2\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \ln(4x-3)=0 \\ \sqrt{x^2+4x-4a-a^2}=0 \end{array}\right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x>\dfrac{3}{4} \\ (a-x)(a+x+4)\leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} 4x-3=1 \\ x^2+4x-4a-a^2=0 \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x>\dfrac{3}{4} \\ (a-x)(a+x+4)\leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ a=x \\ a=-x-4 \end{array}\right. \end{cases}$$



Изобразим множество решений последней системы на отрезке [0; 2] в плоскости xOa.

Искомое множество задают два полуинтервала AC, DF и отрезок BE. Точки A, B, C, D, E, F имеют координаты

$$A\left(\frac{3}{4};\ \frac{3}{4}\right),\ B\,(1;\ 1)\,,\ C\,(2;\ 2)\,,\ D\left(\frac{3}{4};\ -\frac{19}{4}\right),\ E\,(1;\ -5)\,,\ F\,(2;\ -6)\,.$$

Последняя система, а вместе с ней и исходное уравнение имеет единственное решение на отрезке [0; 2] при

$$a\in[-6;\ -5]\cup\left[-\frac{19}{4};\ \frac{3}{4}\right]\cup[1;\ 2]\,.$$

Ответ: $a\in[-6;\ -5]\cup\left[-\dfrac{19}{4};\ \dfrac{3}{4}\right]\cup[1;\ 2]$.

Комментарий.

А. Приведем аналитическое решение задачи. Исходное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x-3>0\\ \sqrt{x^2+4x-4a-a^2}=0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+4x-4a-a^2\geqslant 0\\ \ln(4x-3)=0\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>\dfrac{3}{4}\\ \left[\begin{array}{l}x=a\\ x=-a-4\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+4x-4a-a^2\geqslant 0\\ x=1\end{cases}\end{array}\right.$$

1) Число $x=a$ принадлежит отрезку $[0;\,2]$ при $a\in[0;\,2]$ и является корнем уравнения, если удовлетворяет условию $x>\dfrac{3}{4}$, откуда $a>\dfrac{3}{4}$. Таким образом, $a\in\left(\dfrac{3}{4};\,2\right]$.

2) Число $x=-a-4$ принадлежит отрезку $[0;\,2]$ при $a\in[-6;\,-4]$ и является корнем уравнения, если удовлетворяет условию $x>\dfrac{3}{4}$, откуда $-a-4>\dfrac{3}{4}$, $a<-\dfrac{19}{4}$. Таким образом, $a\in\left[-6;\,-\dfrac{19}{4}\right)$.

3) Число $x=1\in[0;\,2]$ и является корнем уравнения, если удовлетворяет условию $x^2+4x-4a-a^2\geqslant 0$, откуда $1+4-4a-a^2\geqslant 0$, $a\in[-5;\,1]$.

4) Корни $x=a$ и $x=-a-4$ совпадают при $a=-2$ и равны $x=-2$.

5) Корни $x=a$ и $x=1$ совпадают при $a=1$ и равны $x=1$.

6) Корни $x=-a-4$ и $x=1$ совпадают при $a=-5$ и равны $x=1$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,2]$ при $a\in[-6;\,-5]\cup\left[-\dfrac{19}{4};\,\dfrac{3}{4}\right]\cup[1;\,2]$.

12. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

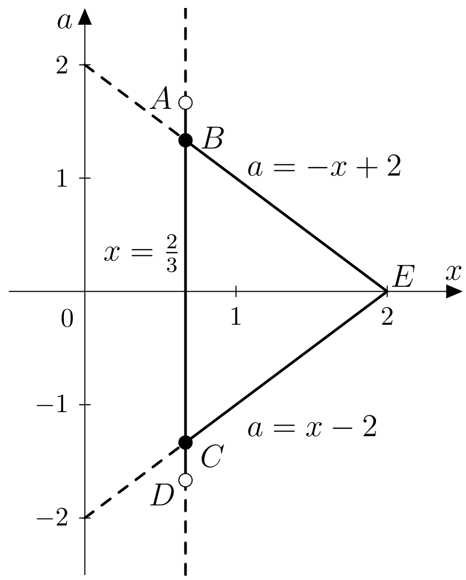
$$\sqrt{3x-2}\cdot\ln(x^2-4x+5-a^2)=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,2]$.

Решение. Имеем:

$$\sqrt{3x-2}\cdot\ln(x^2-4x+5-a^2)=0 \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4x+5-a^2>0\\ \sqrt{3x-2}=0\end{cases}\\ \begin{cases}3x-2\geqslant 0\\ \ln(x^2-4x+5-a^2)=0\end{cases}\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4x+5-a^2>0\\ x=\dfrac{2}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant\dfrac{2}{3}\\ \left[\begin{array}{l}a=x-2\\ a=-x+2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\dfrac{5}{3}<a<\dfrac{5}{3}\\ x=\dfrac{2}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant\dfrac{2}{3}\\ \left[\begin{array}{l}a=x-2\\ a=-x+2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$



Изобразим множество решений последней системы на отрезке $[0;\,2]$ в плоскости xOa. Точки A, B, C, D, E, F имеют координаты

$$A\left(\frac{2}{3};\,\frac{5}{3}\right),\ B\left(\frac{2}{3};\,\frac{4}{3}\right),\ C\left(\frac{2}{3};\,-\frac{4}{3}\right),\ D\left(\frac{2}{3};\,-\frac{5}{3}\right),\ E\,(2;\,0)\,.$$

Последняя система, а вместе с ней и исходное уравнение имеет единственное решение на отрезке $[0;\,2]$ при

$$a\in\left(-\frac{5}{3};\,-\frac{4}{3}\right]\cup\left[-\frac{4}{3};\,\frac{5}{4}\right).$$

Ответ: $a\in\left(-\frac{5}{3};\,-\frac{4}{3}\right]\cup\left[-\frac{4}{3};\,\frac{5}{4}\right)$.

13. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-2x}\cdot\ln\left(25x^2-a^2\right)=\sqrt{1-2x}\cdot\ln(5x+a)$$

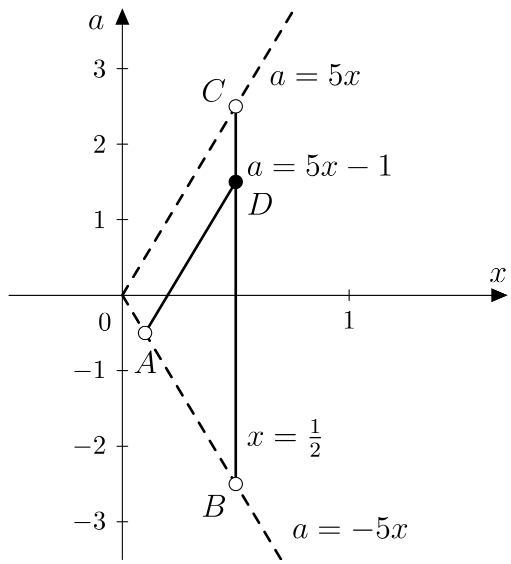
имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$.

Решение. Перенесем правую часть влево и вынесем общий множитель за скобку:

$$\sqrt{1-2x}\cdot\ln\left(25x^2-a^2\right)=\sqrt{1-2x}\cdot\ln(5x+a)\iff\sqrt{1-2x}\left(\ln\left(25x^2-a^2\right)-\ln(5x+a)\right)=0$$

$$\iff\begin{cases}1-2x\geqslant 0\\25x^2-a^2>0\\5x+a>0\\\left[\begin{array}{l}\sqrt{1-2x}=0\\\ln\left(25x^2-a^2\right)=\ln(5x+a)\end{array}\right.\end{cases}\iff\begin{cases}x\leqslant\dfrac{1}{2}\\a>-5x\\a<5x\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\a=5x-1\end{array}\right.\end{cases}$$

Изобразим множество решений последней системы на отрезке $[0;\,1]$ в плоскости xOa.



Искомое множество задает отрезок AD с выколотой точкой A и интервал BC. Точки A, B, C, D имеют координаты

$$A\left(\frac{1}{10};\,-\frac{1}{2}\right),\ B\left(\frac{1}{2};\,-\frac{5}{2}\right),\ C\left(\frac{1}{2};\,\frac{5}{2}\right),\ D\left(\frac{1}{2};\,\frac{3}{2}\right).$$

Последняя система, а вместе с ней и исходное уравнение имеет единственное решение на отрезке $[0;\,1]$ при $a \in \left(-\frac{5}{2};\,-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2};\,\frac{5}{2}\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{5}{2};\,-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2};\,\frac{5}{2}\right)$.

Комментарий.

А. При решении уравнения $\ln\left(25x^2 - a^2\right) = \ln(5x + a)$ мы учли, что $5x + a > 0$, поэтому из уравнения $25x^2 - a^2 = 5x + a$ следует, что $5x - a = 1$, откуда $a = 5x - 1$.

14. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x \cdot \sqrt{x - a} = \sqrt{4x^2 - (4a + 2)x + 2a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$.

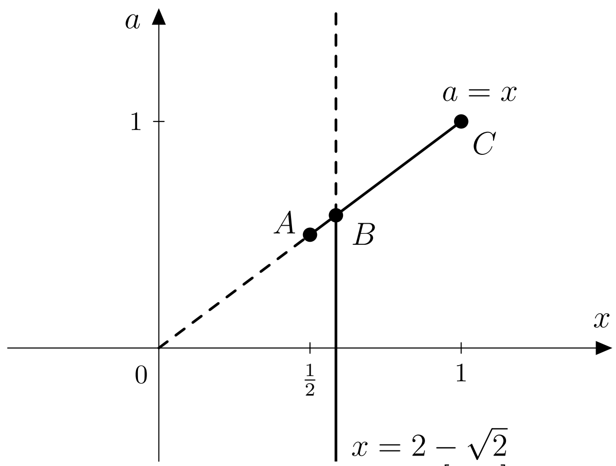
Решение. Так как $4x^2 - (4a + 2)x + 2a = (x - a)(4x - 2)$, и $x - a \geqslant 0$, то

$$\sqrt{4x^2 - (4a + 2)x + 2a} = \sqrt{x - a} \cdot \sqrt{4x - 2}.$$

С учетом этого уравнение примет вид

$$x \cdot \sqrt{x - a} = \sqrt{x - a} \cdot \sqrt{4x - 2} \iff \sqrt{x - a}\left(x - \sqrt{4x - 2}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x - a \geqslant 0 \\ 4x - 2 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x - a} = 0 \\ x - \sqrt{4x - 2} = 0 \end{array}\right. \end{cases} \overset{x \in [0;\,1]}{\iff} \begin{cases} a \leqslant x \\ x \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} a = x \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$$



Изобразим множество решений системы на отрезке $[0;\,1]$ в плоскости xOa.
Искомое множество задает отрезок AC и луч. Точки A, B, C имеют координаты

$$A\left(\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right),\ B\left(2-\sqrt{2};\,2-\sqrt{2}\right),\ C\,(1;\,1)\,.$$

Последняя система, а вместе с ней и исходное уравнение имеет единственное решение на отрезке $[0;\,1]$ при $a \in \left(-\infty;\,\frac{1}{2}\right) \cup \left[2-\sqrt{2};\,1\right]$.

Ответ: $a \in \left(-\infty;\,\frac{1}{2}\right) \cup \left[2-\sqrt{2};\,1\right]$.

Комментарий.

А. Уравнение $x-\sqrt{4x-2}=0$ имеет два корня: $x_1=2+\sqrt{2}$, $x_2=2-\sqrt{2}$. Корень $x_1 \notin [0;\,1]$.

15. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}}=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[4;\,8]$.

Решение. Имеем:

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}}=0 \iff \begin{cases} 10x-x^2-a^2>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=a+7 \\ x=2-a \end{array}\right. \end{cases}$$

1) Число $x=a+7$ принадлежит отрезку $[4;\,8]$ при $a\in[-3;\,1]$ и является корнем уравнения, если удовлетворяет условию

$$10x-x^2-a^2>0 \iff 10(a+7)-(a+7)^2-a^2>0 \iff a \in \left[\frac{-2-\sqrt{46}}{2};\,\frac{-1+\sqrt{46}}{2}\right].$$

2) Число $x=2-a$ принадлежит отрезку $[4;\,8]$ при $a\in[-6;\,-2]$ и является корнем уравнения, если удовлетворяет условию

$$10x-x^2-a^2>0 \iff 10(2-a)-(2-a)^2-a^2>0 \iff a \in \left[\frac{-3-\sqrt{41}}{2};\,\frac{-3+\sqrt{41}}{2}\right].$$

3) Корни $x = a + 7$ и $x = 2 - a$ совпадают при $a = -\dfrac{5}{2}$ и равны $x = \dfrac{9}{2} \in [4;\, 8]$.
Итак, уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[4;\, 8]$ при

$$a \in \left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2};\, -3\right) \cup \left\{-\frac{5}{2}\right\} \cup (-2;\, 1].$$

Ответ: $a \in \left(\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2};\, -3\right) \cup \left\{-\dfrac{5}{2}\right\} \cup (-2;\, 1]$.

Задачи для самостоятельного решения

16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a(x-1) \geqslant 4 \\ 2\sqrt{x-2} \geqslant a \\ 3x < a + 14 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4;\ 5]$.

Ответ: $a \in \left(1;\ 2\sqrt{3}\right]$.

17. Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x \leqslant 2a + 6, \\ 6x \geqslant x^2 + a^2, \\ x + a > 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[1; 2]$.

Ответ: $a \in (-2;\ \sqrt{8}]$.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\operatorname{tg}(\pi x)\ln(2x + a) = \ln(2x + a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

Ответ: $a \in \left[-1;\ -\dfrac{1}{2}\right] \cup \{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \cup (1;\ +\infty)$.

19. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-a} \cdot \sin x = \sqrt{x-a} \cdot \cos x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ \pi]$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ 0) \cup \left[\dfrac{\pi}{4};\ \pi\right]$.

20. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-a} \cdot \sin x = \sqrt{x-a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ \pi]$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ 0) \cup \left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

21. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (x-1)\sqrt{2x-a} = x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 2]$.

22. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x-1} \cdot \ln(4x-a) = \sqrt{2x-1} \cdot \ln(5x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{5}{2};\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{4};\ 2\right)$.

23. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x-3} \cdot \ln(2x-a) = \sqrt{4x-3} \cdot \ln(3x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{9}{4};\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{3}{8};\ \frac{3}{2}\right)$.

24. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x-2} \cdot \ln(x-a) = \sqrt{3x-2} \cdot \ln(2x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{4}{3};\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$.

25. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(3x-1) \cdot \ln(4x-a) = (3x-1) \cdot \ln(3x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

Ответ: $a \in (-1;\ 0] \cup \left\{\frac{1}{6}\right\} \cup \left(\frac{1}{2};\ \frac{4}{3}\right)$.

26. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\ln(5x-2) \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 2a - a^2} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{5}{4};\ -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4};\ \frac{5}{4}\right)$.

27. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\ln(4x-2)\cdot\sqrt{x^2-4x+4a-a^2}=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,2]$.

Ответ: $a\in\left(\frac{1}{2};\,\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{13}{4};\,\frac{7}{2}\right)$.

28. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\ln(4x-1)\cdot\sqrt{x^2-6x+6a-a^2}=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,3]$.

Ответ: $a\in\left(\frac{1}{4};\,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{11}{2};\,\frac{23}{4}\right)$.

29. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x-3}\cdot\ln(x^2-6x+10-a^2)=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,3]$.

Ответ: $a\in\left(-\frac{13}{5};\,-\frac{12}{5}\right]\cup\left[\frac{12}{5};\,\frac{13}{5}\right)$.

30. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x-1}\cdot\ln(x^2-2x+2-a^2)=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$.

Ответ: $a\in\left(-\frac{5}{4};\,-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4};\,\frac{5}{4}\right)$.

31. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2-3x}\cdot\ln\left(16x^2-a^2\right)=\sqrt{2-3x}\cdot\ln(4x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$.

Ответ: $a\in\left(-\frac{8}{3};\,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{3};\,\frac{8}{3}\right)$.

32. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-4x}\cdot\ln\left(9x^2-a^2\right)=\sqrt{1-4x}\cdot\ln(3x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$.

Ответ: $a\in\left(-\frac{3}{4};\,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[-\frac{1}{4};\,\frac{3}{4}\right)$.

33. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3-5x}\cdot\ln\left(4x^2-a^2\right)=\sqrt{3-5x}\cdot\ln(2x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$.

Ответ: $a\in\left(-\dfrac{6}{5};\,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{5};\,\dfrac{6}{5}\right)$.

34. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x\cdot\sqrt{x-a}=\sqrt{6x^2-(6a+3)x+3a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$.

Ответ: $a\in(-\infty;\,0)\cup\left[3-\sqrt{6};\,1\right]$.

Глава 3

Образцы заданий 2016 года

1. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. 1) Уравнение $y = ax$ – задает семейство прямых («пучок») проходящих через точку с координатами (0; 0).

2) Рассмотрим первое уравнение системы. Имеем

$$\begin{cases} 4 - y > 0 \\ xy^2 - 2xy - 4y + 8 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y < 4 \\ (y-2)(xy-4) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y < 4 \\ \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ xy = 4 \end{array} \right. \end{cases}$$

3) Изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы. Графиком $y = 2$ – является горизонтальная прямая, графиком $xy = 4$ – является гипербола расположенная в первой и третьей координатных четвертях.

4) Система имеем ровно три различных решения при $a \in (0;\,1) \cup (1;\,4)$

Ответ: $a \in (0;\,1) \cup (1;\,4)$.

Комментарий.

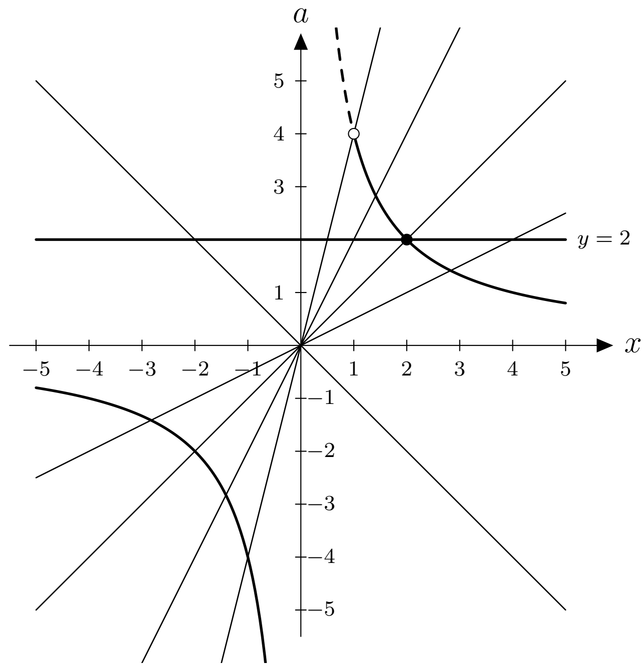
А. Несмотря на то, что задача по своей природе, больше относится к задачам решаемым графическим способом, приведем аналитическое решение, тем более. что оно не сложное.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 2xy - 6y + 12}{\sqrt{x+3}} = 0 \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. 1) Уравнение $y = x + a$ – задает семейство прямых параллельных, либо совпадающих с прямой $y = x$.



2) Рассмотрим первое уравнение системы. Имеем

$$\begin{cases} x+3>0 \\ xy^2-2xy-6y+12=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-3 \\ (y-2)(xy-6)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-3 \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ xy=6 \end{array}\right. \end{cases}$$

3) Изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы. Графиком $y=2$ – является горизонтальная прямая, графиком $xy=6$ – является гипербола расположенная в первой и третьей координатных четвертях.

4) Точки A, B, C имееют координаты $A(3;\,2)$, $B(-3;\,-2)$, $C(-3;\,2)$. Система имеет ровно два различных решения, при $a \in \{-1\} \cup [1;\,5)$.

Ответ: $a \in \{-1\} \cup [1;\,5)$.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy^2-2xy-6y+12)\sqrt{6-x}=0 \\ y=ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{15x^2+6ax+9}=x^2+ax+3$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. Имеем

$$\sqrt{15x^2+6ax+9}=x^2+ax+3 \iff \begin{cases} x^2+ax+3\geqslant 0 \\ 15x^2+6ax+9=(x^2+ax+3)^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2+ax+3\geqslant 0 \\ x^4+2ax^3+(a^2-9)x^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+ax+3\geqslant 0 \\ x^2(x^2+2ax+a^2-9)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+ax+3\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=3-a \\ x_3=-3-a \end{array}\right. \end{cases}$$

Последняя система, а вместе с ней и исходное уравнение имеет ровно три различных решения при условии, что $x_1\neq x_2$, $x_1\neq x_3$, $x_2\neq x_3$ и все три корня удовлетворяют условию $x^2+ax+3>0$. Имеем систему

$$\begin{cases} 3-a\neq 0 \\ -3-a\neq 0 \\ -3-a\neq 3-a \\ 0^2+a\cdot 0+3\geqslant 0 \\ (3-a)^2+a(3-a)+3\geqslant 0 \\ (-3-a)^2+a(-3-a)+3\geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a\neq\pm 3 \\ a\leqslant 4 \\ a\geqslant -4 \end{cases} \iff a\in[-4;\,-3)\cup(-3;\,3)\cup(3;\,4]$$

Ответ: $a\in[-4;\,-3)\cup(-3;\,3)\cup(3;\,4]$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x-2a}{x+2}+\frac{x-1}{x-a}=1$$

имеет единственный корень.

Решение. Приводя обе части уравнения к общему знаменателю получим

$$\frac{x^2-(2a+1)x+2a^2+2a-2}{(x+2)(x-a)}=0 \iff \begin{cases} x\neq -2 \\ x\neq a \\ x^2-(2a+1)x+2a^2+2a-2=0 \end{cases}$$

Система, а вместе с ней и исходное уравнение имеет единтсвенное решение в двух случаях:

1) Квадратное уравнение $x^2-(2a+1)x+2a^2+2a-2=0$ имеет единственнЫй корень не совпадающий с $x=-2$ и $x=a$. Имеем

$$D=0 \iff 4a^2+4a-9=0 \iff a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{10}}{2}$$

При таких значениях a, корень будет равняться $x=\dfrac{2a+1}{2}=\dfrac{-1\pm 2\sqrt{10}}{2}$ и не совпадает ни с $x=-2$, ни с $x=a$.

2) Квадратное уравнение $x^2-(2a+1)x+2a^2+2a-2=0$ имеет два корня, один из которых совпадает с $x=-2$ либо $x=a$.

а) Число $x=-2$ является корнем уравнения при

$$4+4a+2+2a^2+2a-2=0 \iff a_1=-1,\ a_2=-2$$

При $a=-1$ имеем систему

$$\begin{cases} x\neq -2 \\ x\neq -1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \iff x=1$$

то есть уравнение имеет один корень и $a=-1$ – искомое.

При $a=-2$ имеем систему

$$\begin{cases} x\neq -2 \\ x^2+3x+2=0 \end{cases} \iff x=-1$$

то есть уравнение имеет один корень и $a=-1$ – искомое.

б) Число $x=a$ является корнем уравнения при

$$a^2-a(2a+1)+2a^2+2a-2=0 \iff a_1=1,\ a_2=-2$$

При $a=1$ имеем систему

$$\begin{cases} x\neq -2 \\ x\neq 1 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \iff x=2$$

то есть уравнение имеет один корень и $a=1$ – искомое.

Итак, искомые значения параметра – $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{10}}{2}$, $a=-2$, $a=-1$, $a=1$.

Ответ: $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{10}}{2}$, $a=-2$, $a=-1$, $a=1$.

Комментарий.

А. Приведем графическое решение. Сделаем замену $x-a=t$. Тогда уравнение примет вид

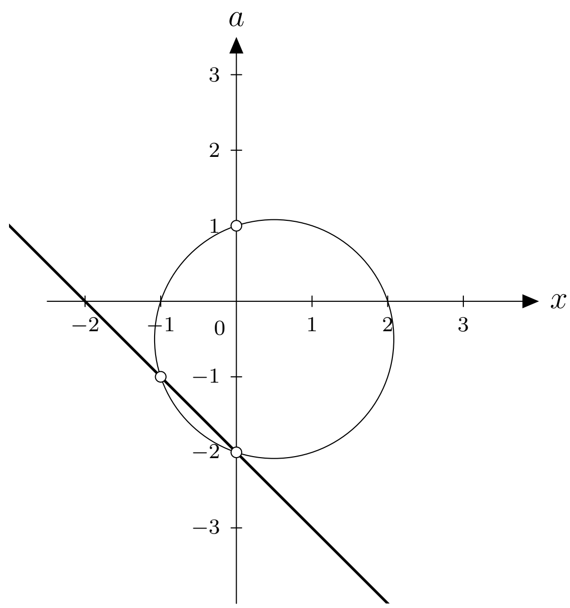
$$\frac{t-a}{t+a+2}+\frac{t+a-1}{t}=1$$

Так как замена взаимно однозначная, то необходимо найти все значения параметра a, при которых последнее уравнение имеет едintсвенное решение. Приводя обе части уравнения к общему знаменателю получим

$$\frac{t^2-t+a^2+a-2}{t(t+a+2)}=0 \iff \begin{cases} t+a+2\neq 0 \\ t\neq 0 \\ t^2-t+a^2+a=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a\neq -t-2 \\ t\neq 0 \\ \left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)^2 \end{cases}$$

Изобразим множество точек удовлетворяющих системе в плоскости tOa. Уравнение $a = -t-2$ – задает прямую параллельную прямой $y=-t$ проходящую через точку $(0; -2)$. Уравнение $\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)^2$ – задает окружность с центром в точке $\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ и радиуса $R=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

Уравнение имеет едингтсвенное решение, при $a=-2$, $a=-1$, $a=1$, а так же при $a = \dfrac{-1\pm\sqrt{10}}{2}$.



6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4-x^2+a^2}=x^2+x-a$$

имеет ровно три различных решения.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3+x^2-9a^2x-2x+a}{x^3-9a^2x}=1$$

имеет единственный корень.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

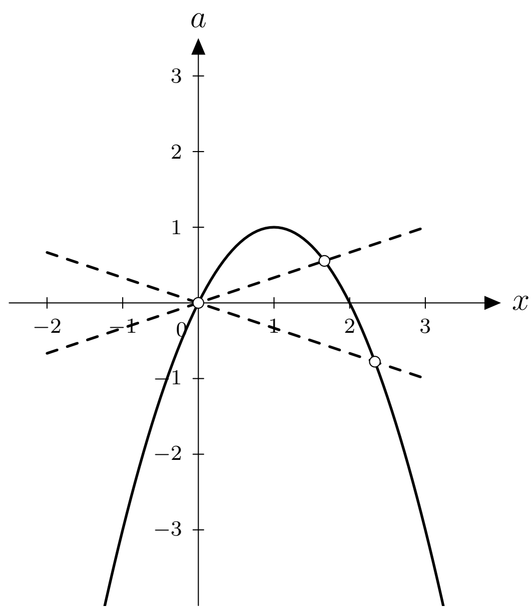
$$\begin{cases} x^3-9a^2x\neq 0 \\ x^3+x^2-9a^2x-2x+a=x^3-9a^2x \end{cases} \iff \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 3a \\ x\neq -3a \\ x^2-2a+a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\neq 0 \\ a\neq \dfrac{x}{3} \\ a\neq -\dfrac{x}{3} \\ a=1-(x-1)^2 \end{cases}$$

Изобразим множество точек координтаы которых удовлетворяют системе в плоскости xOa. Уравнения $a=\pm\dfrac{x}{3}$ – задают прямые проходящие через начало координат. Уравнение $a=1-(x-1)^2$ – задает параболу с вершиной в точке $(1; 1)$ ветви которой направлены вниз.

Точки A, B, C, D имеют координаты $A(0;\,0)$, $B(1;\,1)$, $C\left(\frac{5}{3};\,\frac{5}{9}\right)$; $D\left(-\frac{7}{3};\,-\frac{7}{9}\right)$.

Система имеет единтсвенное решение при $a=-\frac{7}{9}$, $a=0$, $a=\frac{5}{9}$ и $a=1$.

Ответ: $a\in\left\{-\frac{7}{9};\,0;\,\frac{5}{9};\,1\right\}$.



Комментарий.

А. Данная задача похожа на 5 задачу, за тем исключением, что тут графическое решение оказывается проще аналитического. Аналитическое решение предоставляется читателю.

8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2^x-a=\sqrt{4^x-a}$$

имеет единственный корень.

Решение. Сделаем замену $2^x=t>0$ и найдем все значения параметра a при которых уравнение

$$t-a=\sqrt{t^2-a}$$

имеем единтсвенный положительный корень. Имеем

$$t-a=\sqrt{t^2-a}\iff\begin{cases}t>0\\ t\geqslant a\\ (t-a)^2=t^2-a\end{cases}\iff\begin{cases}t>0\\ t\geqslant a\\ 2at=a^2+a\end{cases}$$

При $a=0$ любое положительное значение t является корнем уравнения, значит $a=0$ не удовлетворяет условию.

При $a\neq 0$ имеем $t=\dfrac{a+1}{2}$. Для этого корня должны выполняться условия $t\geqslant a$ и $t>0$, то есть

$$\begin{cases} \dfrac{a+1}{2} > 0 \\ \dfrac{a+1}{2} \geqslant a \end{cases} \iff a \in (-1;\, 1]$$

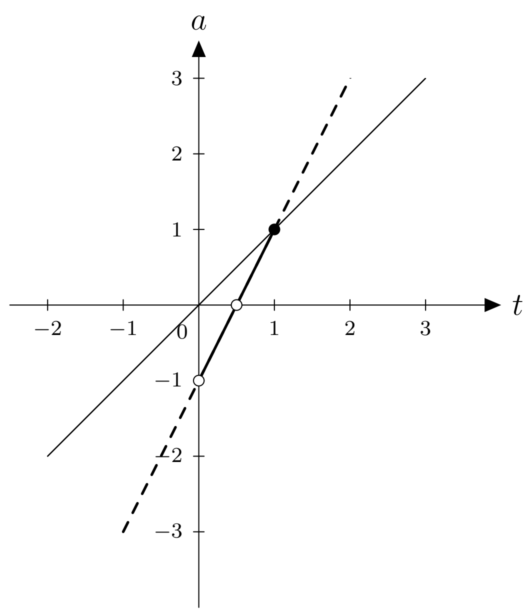
С учетом $a \neq 0$, получаем окончательный ответ $a \in (-1;\, 0) \cup (0;\, 1]$.

Ответ: $a \in (-1;\, 0) \cup (0;\, 1]$.

Комментарий.

А. Аналитическое решения в данном случае оказалось достаточно простым. Тем не менее можно использовать плоскость tOa для большей наглядности. Имеем систему

$$\begin{cases} t > 0 \\ a \leqslant t \\ a \neq 0 \\ a = 2t - 1 \end{cases}$$



9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

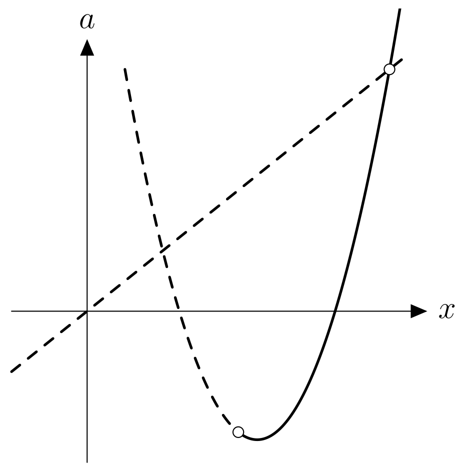
$$\sqrt{2^x - a} + \frac{a-4}{\sqrt{2^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Запишем уравнение в виде $\dfrac{2^x - 4}{\sqrt{2^x - a}} = 1$ и сделаем замену $2^x = t > 0$. Требуется найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{t-4}{\sqrt{t-a}} = 1$ имеет единтсвенное положительное решение. Имеем

$$\frac{t-4}{\sqrt{t-a}} = 1 \iff \begin{cases} t > 0 \\ t \neq a \\ t - 4 = \sqrt{t-a} \end{cases} \iff \begin{cases} t \geqslant 4 \\ t \neq a \\ (t-4)^2 = t - a \end{cases} \iff \begin{cases} t \geqslant 4 \\ a \neq t \\ a = t^2 - 9t + 16 \end{cases}$$

Изобразим множество точек, в плоскости tOa координаты которых удовлетворяют последней системе. Уравнение $a = t$ – задает юиссектрису 1 и 3 координтаной четверти. Уравнение $a = t^2 - 9t + 16$ – задает параболу с вершиной в точке $\left(\frac{9}{2}; -\frac{17}{4}\right)$ ветви которой направлены вверх.



Система имеет ровно два решения, при $a \in \left(-\frac{17}{4}; -4\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{17}{4}; -4\right)$.

Комментарий.

А. Приведем аналитическое решение. Имеем

$$\begin{cases} t \geqslant 4 \\ t \neq a \\ t^2 - 9t + 16 - a = 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} t \geqslant 4 \\ t \neq a \\ \begin{cases} t_1 = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{4a+17}}{2} \\ t_2 = \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{4a+17}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Последняя система имеет ровно два решения при условии $t_1 \neq t_2\,(D > 0)$ и $t_1 \geqslant 4$, $t_2 \geqslant 4$, $t_1 \neq a$, $t_2 \neq a$. Так как $t_2 \geqslant \frac{9}{2} > 4$, то имеем

$$\begin{cases} a^2 - 9a + 16 - a \neq 0 \\ \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{4a+17}}{2} \geqslant 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - 10 + 16 \neq 0 \\ \sqrt{4a+17} \leqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a \neq 2 \\ a \neq 8 \\ 0 \leqslant 4a + 17 \leqslant 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff a \in \left(-\frac{17}{4}; -4\right)$$

10. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{2a - x} = a$$

имеет ровно два различных корня.

Решение. При $a<0$ уравнение решений не имеет так как слева сумма двух неотрицательных слагаемых.

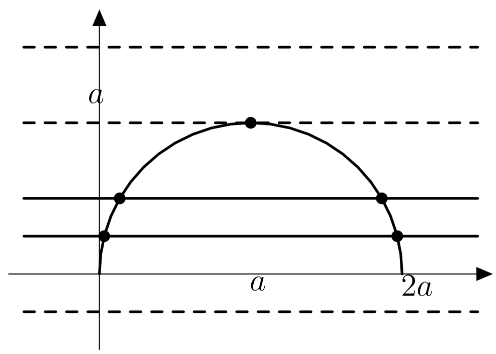
При $a=0$ уравнение прмиет вид $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$ и имеет единтственное решение $x=0$.

При $a>0$ возведем обе части уравнения в квадрат

$$\begin{cases} a>0 \\ x+2\sqrt{x(2a-x)}+2a-x=a^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \sqrt{2ax-x^2}=\dfrac{a^2-2a}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \sqrt{a^2-(x-a)^2}=\dfrac{a^2-2a}{2} \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $y=\sqrt{a^2-(x-a)^2}$. Графиком такой функции явлляется верхняя полуокружность с центром в точке $(a;\,0)$ и радиуса $a\,(a>0)$.

Функция $y=\dfrac{a^2-2a}{2}$ – задает семейство горизонтальных прямых.



Уравнение имеет ровно два решения, при

$$\begin{cases} a>0 \\ \dfrac{a^2-2a}{2}\geqslant 0 \\ \dfrac{a^2-2a}{2}<a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a(a-2)\geqslant 0 \\ a(a-4)<0 \end{cases} \Longleftrightarrow a\in[2;\,4)$$

Ответ: $a\in[2;\,4)$.

Комментарий.

А. Уравнение полуокружности.

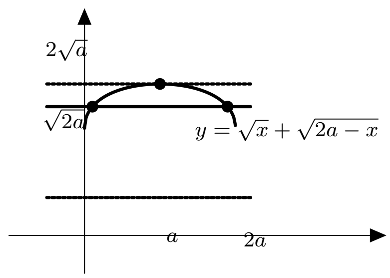
Б. Данная задача хороша тем, что решается многими способами. Мы нашли как минимум 6 различных решений. Приведем еще два, а остальные оставим читателю.

В. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}$. Так как $a>0$, то область определения функции есть отрезок $[0;\,2a]$. Исследуем данную функцию на отрезке $[0;\,2a]$ С помощью производной. Имеем

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{2a-x}}=\frac{\sqrt{2a-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{2a-x}}$$

Произвдная функции обращается в ноль в единтственной точке $x=a\in[0;\,2a]$. При $x<a$ имеем $f'(x)>0$ и функция убывает, при $x>a$ имеем $f'(x)<0$ и функция возрастает. ИМеем

$$f(0)=\sqrt{2a},\ f(a)=2\sqrt{a},\ f(2a)=\sqrt{2a}$$



Уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{2a - x} = a$ имеет ровно два решения, при

$$\begin{cases} a > 0 \\ a \geqslant \sqrt{2a} \\ a < 2\sqrt{a} \end{cases} \iff \begin{cases} a > 0 \\ a \geqslant 2 \\ a < 4 \end{cases} \iff a \in [2;\,4)$$

Д. Достаточно часто при решении задач встречается функция $y = \sqrt{x - a} + \sqrt{b - x}$. Полезно знать ее свойтсва и график.

Е. Приведем аналитическое решение задачи. После возведения обеих частей уравнения в квадрат получим систему

$$\begin{cases} a > 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant 2a \\ 2\sqrt{2ax - x^2} = a^2 - 2a \end{cases} \iff \begin{cases} a \geqslant 2 \\ 0 \leqslant x \leqslant 2a \\ 4(2ax - x^2) = (a^2 - 2a)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a \geqslant 2 \\ 0 \leqslant x \leqslant 2a \\ 4x^2 - 8ax + (a^2 - 2a)^2 = 0 \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения $D = 64a^3 - 16a^4$ и положителен при $a \in [2;\,4)$. Корни равны

$$x_1 = a\left(1 - \frac{\sqrt{4a - a^2}}{2}\right), \qquad x_1 = a\left(1 + \frac{\sqrt{4a - a^2}}{2}\right)$$

Так как $a^2 - 4a + 4 \geqslant 0$, то $\dfrac{4a - a^2}{4} \leqslant 1$, значит $\dfrac{\sqrt{4a - a^2}}{2} \leqslant 1$. Таким образом оба корня всегда принадлежат отрезку $[0;\,2a]$.

Итак, все значения $a \in [2;\,4)$ удовлетворяют условию задачи.

11. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x\left(x^2 + y^2 - y - 2\right) = |x|(y - 2) \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. 1) Уравнение $y = x + a$ – при каждом значении параметра a задает прямую параллельную прямой $y = x$, либо совпадающую с ней.

2) Рассмотрим первое уравнение системы $x\left(x^2 + y^2 - y - 2\right) = |x|(y - 2)$.

а) При $x = 0$ получаем $0 = 0$, значит $x = 0$ – является решением.

б) При $x > 0$, получаем

$$x\left(x^2 + y^2 - y - 2\right) = x(y - 2) \iff x^2 + y^2 - y - 2 = y - 2 \iff x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

Полученное уравнение задает окружность с центром в точке $O_1(0;\,1)$ и радиусом равным 1.

в) При $x < 0$, получаем

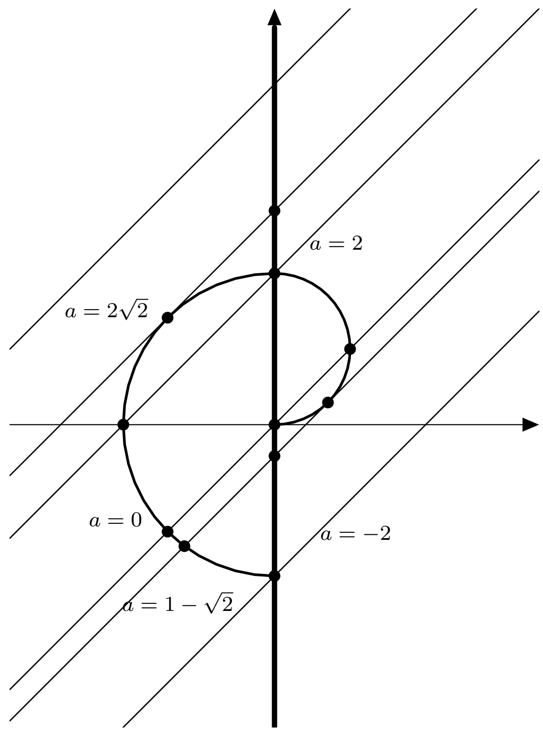
$$x\left(x^2+y^2-y-2\right) = -x(y-2) \iff x^2+y^2-y-2 = 2-y \iff x^2+y^2 = 4$$

Полученное уравнение задает окружность с центром в точке $O_2(0;\,0)$ и радиусом равным 2.

3) Изобразим множество точек в плоскости xOy координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы. Прямая $y = x + a$ касается окружности $(x-1)^2+y^2 = 1$ снизу при $a = 1-\sqrt{2}$, а окружности $x^2+y^2 = 4$ сверху при $a = 2\sqrt{2}$.

Система имеет ровно три различных решения при

$$a \in \{1-\sqrt{2}\} \cup [0;\,2) \cup (2;\,2\sqrt{2}]$$



12. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x\left(x^2+y^2+y-x-2\right) = |x|\left(x^2+y^2-y-x\right) \\ y = a(x+2) \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. 1) Уравнение $y = a(x+2)$ – задает семейство прямых («пучок») проходящих через точку с координатами $(-2;\,0)$.

2) Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы. Рассмотрим три случая.

а) Если $x = 0$, то получаем $0 = 0$, значит $x = 0$ – является решением. б) Если $x < 0$, то получаем уравнение

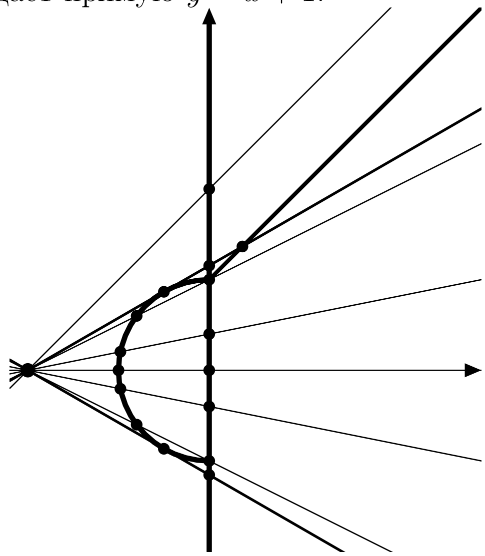
$$x\left(x^2+y^2+y-x-2\right) = -x\left(x^2+y^2-y-x\right) \iff 2x^2+2y-2 = 0 \iff x^2+y^2 = 1$$

Полученное уравнение задает окружность с центром в точке $O(0;\,0)$ и радиусом равным 1.

в) Если $x > 0$, то получаем уравнение

$$x\left(x^2+y^2+y-x-2\right)=x\left(x^2+y^2-y-x\right) \iff 2y-2x-2=0 \iff y=x+1$$

Полученное уравнение задает прямую $y = x + 1$.



Система имеет ровно три решения при

$$a \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

13. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)(y+3x-9)=|x-3|^3 \\ y=x+a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Уравнение $y = x + a$ – при каждом значении параметра a задает прямую параллельную прямой $y = x$, либо совпадающую с ней.

Изобразим на координатной плоскости xOy множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы. Рассмотрим три случая

1) Если $x = 3$, то получаем верное равенство $0 = 0$, значит $x = 3$ – решение.

2) Если $x < 3$, то $|x-3| = -(x-3)$ и мы получаем уравнение

$$(x-3)(y+3x-9)=-(x-3)^3 \iff y+3x-9=-(x-3)^2 \iff y=-x^2+3x$$

Полученное уравнение задает параболу $y = -x^2 + 3x$.

3) Если $x > 3$, то $|x-3| = x-3$ и мы получаем уравнение

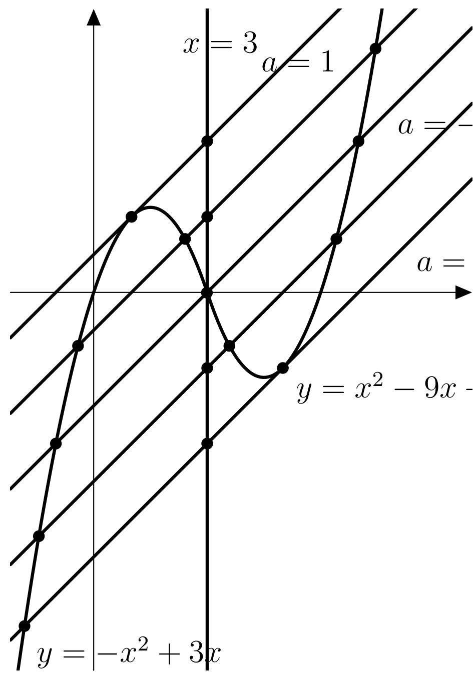
$$(x-3)(y+3x-9)=(x-3)^3 \iff y+3x-9=(x-3)^2 \iff y=x^2-9x+18$$

Полученное уравнение задает параболу $y = x^2 - 9x + 18$.

Система имеет ровно четыре различных решения при

$$a \in (-7;\,-3) \cup (-3;\,1)$$

Ответ: $a \in (-7;\,-3) \cup (-3;\,1)$.



Задачи для самостоятельного решения

14. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

15. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{x+4}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

16. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - xy - 4y + 4}{\sqrt{x+2}} = 0 \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

16.1 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - xy - 5y + 5}{\sqrt{5-y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

17. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy^2 - xy - 6y + 6)\sqrt{y+2} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных решения.

19. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 9x^2 + a^2} = x^2 + 3x - a$$

имеет ровно три различных решения.

20. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 9x^2 + a^2} = x^2 - 3x - a$$

имеет ровно три различных решения.

21. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x-3a}{x+3} + \frac{x-1}{x-a} = 1$$

имеет единственный корень.

22. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - 3a}$$

имеет единственный корень.

23. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2^x - a} + \frac{a+2}{\sqrt{2^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных решения.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2^x - a} + \frac{a-1}{\sqrt{2^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных корня.

24. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x\left(x^2 + y^2 - 2y - 8\right) = |x|(2y - 8) \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

25. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-2)(y+2x-4) = |x-2|^3 \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответы

14. $a \in \left(0;\ \frac{1}{3}\right] \cup \{3\}$; **15.** $a \in \left(0;\ \frac{1}{4}\right] \cup \{1\}$; **16.** $a \in \{-3\} \cup [0;\ 3)$; **17.** $a \in \left\{\frac{1}{6}\right\} \cup \left[\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; **18.** $a \in [-2;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ 2]$; **19.** $a \in (-\infty;\ -9) \cup (-9;\ 0)$; **20.** $a \in (-\infty;\ -9) \cup (-9;\ 0)$; **21.** $a \in \left\{\frac{-3 \pm 4\sqrt{3}}{3};\ -3;\ \pm 1\right\}$; **22.** $a \in (-3;\ 0) \cup (0;\ 3]$; **23.** $a \in \left(2;\ \frac{9}{4}\right)$; **24.** $a \in \left\{2 - 2\sqrt{2}\right\} \cup [0;\ 4) \cup \left(4;\ 4\sqrt{2}\right)$; **25.** $a \in \left(-\frac{9}{4};\ -2\right) \cup \left(-2;\ -\frac{7}{4}\right)$;

Глава 4

Образцы заданий 2015 года

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy - 7y + 4x + 12)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}} = 0 \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy - 7y + 4x + 12)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}} = 0 \\ a = x + y \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y^2 - xy - 7y + 4x + 12 = 0 \\ x = -4 \end{array}\right. \\ x \geqslant -4 \\ y < 7 \\ y = -x + a \end{cases}$$

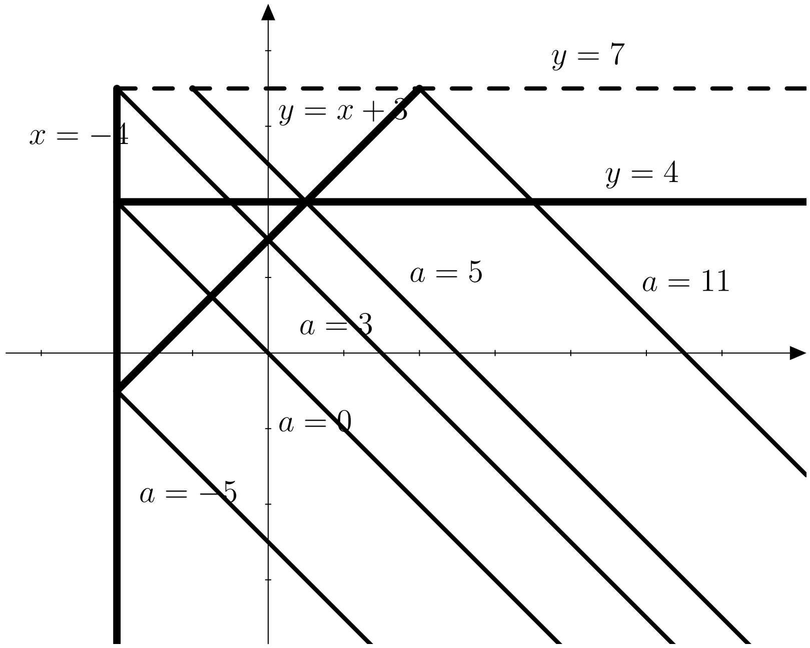
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} (y-4)(y-3-x) = 0 \\ x = -4 \end{array}\right. \\ x \geqslant -4 \\ y < 7 \\ y = -x + a \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = x + 3 \\ x = -4 \end{array}\right. \\ x \geqslant -4 \\ y < 7 \\ y = -x + a \end{cases}$$

Изобразим множество решений последней системы в плоскости xOy. Уравнение $y = -x + a$ задает семейтсво прямых параллельных либо совпадащих с прямой $y = -x$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ -5] \cup \{5\} \cup [11;\ +\infty)$.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y(y-7) = xy - 5(x+2) \\ x \leqslant 6 \\ \dfrac{a(x-6)-2}{y-2} = 1 \end{cases}$$



имеет единственное решение.

Решение.
Ответ: $a \in \left\{-\frac{5}{3};\ -\frac{1}{3}\right\} \cup [0;\ 1)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 4y = 4|2x - y| \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Ответ: $a \in (-5\sqrt{5} - 5;\ -10] \cup [0;\ 5\sqrt{5} - 5)$.

3.1 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x - 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1| \\ y = a(x - 1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Ответ: $a \in (1;\ 2)$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2-2x|-x^2=|y^2-2y|-y^2 \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Ответ: $a \in (0;\ 1]$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2+x-2=|x^2+x-2| \\ x-y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Задачи для самостоятельного решения

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy-4y+2x+4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0 \\ a=x+y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy+3x-y-6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}=0 \\ x+y-a=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy+3x-y-6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}=0, \\ x+y-a=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy+4x-7y+12)\sqrt{x+5}}{\sqrt{5-x}}=0, \\ x+y-a=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy + 5x - 4y - 5)\sqrt{x+3}}{\sqrt{7-x}} = 0, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy - 9y + 5x + 20)\sqrt{x+5}}{\sqrt{7-y}} = 0, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (y^2 - xy + x - 3y + 2)\sqrt{x+3} = 0 \\ a - x - y = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 4y + 15 = 4|2x - y - 10| \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 6x + 6y - 18 = |x^2 + y^2 - 9| \\ y - 3 = ax \end{cases}$$

имеет более двух решений.

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = |x^2 + y^2 - 25| \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 4|3y + x + 1| = 9 \\ y + 1 = a(x - 2) \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2+2x|-2x=|y^2+2y|-2y \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

14. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+|x^2-2x|=y^2+|y^2-2y|, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2-1|+2x-x^2=|y^2-1|+2y-y^2 \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-x+|x^2+x-2|=y^2-y+|y^2+y-2| \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

15. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2-x-2=|x^2-x-2|, \\ x-y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Глава 5

Образцы заданий 2014 года

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = |x + a - 5| + |x - a + 5|$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если число x_0 является решением уравнения, то и $-x_0$ так же является решением. Значит $x_0 = -x_0$, откуда $x_0 = 0$. Подставляя в исходное уравнение $x = 0$, получим

$$(a-5)^2 = 2|a-5| \iff |a-5|(|a-5|-2) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = 3 \\ a = 7 \end{array}\right.$$

Сделаем проверку найденных значений параметра.

1) При $a = 5$, уравнение примет вид $x^2 = 2|x|$ и имеет три корня $x = 0$, $x = \pm 2$.

2) При $a = 3$, $a = 7$ уравнение прмиет вид $\sqrt{x^4 + 16} = |x+2| + |x-2|$. Такое уравнение имеет единтсвенный корень $x = 0$.

Итак, условию задачи удовлетворяют два значения параметра $a = 3$, $a = 7$.

Ответ: $a = 3$, $a = 7$.

Комментарий.

А. Решить уравнение $\sqrt{x^4 + 16} = |x+2|+|x-2|$ можно стандартным методом интервалов.

1. При $x < -2$, уравнение примет вид $\sqrt{x^4 + 16} = -2x$. Такое уравнение после возведения в квадрат приводится к виду $x^4 - 4x^2 + 16 = 0$ и не имеет действителных корней.

2. При $-2 \leqslant x \leqslant 2$, уравнение примет вид $\sqrt{x^4 + 16} = 4$, откуда $x = 0$.

3. При $x > 2$, уравнение примет вид $\sqrt{x^4 + 16} = 2x$. Такое уравнение не имеет действительных корней.

Б. Условие $x = 0$ является необходимым для того, чтобы уравнение имело один корень, однако не является достаточным. Как мы видели при $a = 5$ уравнение имеет три корня среди которых $x = 0$.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3.5x-2.5}+3\log_2(3x-1)+2a=0$$

принадлежит отрезку [1; 3].

Решение. Рассмотрим функию $f(x)=4\sqrt[3]{3.5x-2.5}+3\log_2(3x-1)+2a$. Такая функция возрастает на промежутке $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$ как сумма возрастающих функций, поэтому уравнение $f(x)=0$ имеет не более одного корня. Для того, чтобы корень принадлежал отрезку [1; 3] необходимо и достаточно выполнения системы

$$\begin{cases} f(1)\leqslant 0\\ f(3)\geqslant 0\end{cases}\iff\begin{cases} 2a+7\leqslant 0\\ 2a+17\geqslant 0\end{cases}\iff a\in\left[-\frac{17}{2};-\frac{7}{2}\right].$$

Комментарий.

А. Достаточно часто при решении задач, бывают полезными следующие утверждения.

1. Сумма возрастащих (убывающих) функций возрастает (убывает).

2. Произведение возрастащих положителных функций возрастает.

Доказываются такие утверждения достаточно легко, пользуясь производной. Доказать!

Б. Для того, чтобы возрастащая функия имела корнеь на отрезке $[\alpha;\beta]$ необходимо и досттаочно. + Картинка

В. Для того, чтобы убыващая функия имела корнеь на отрезке $[\alpha;\beta]$ необходимо и досттаочно. + Картинка

3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(\log_8(x+a)-\log_8(x-a))^2-12a\left(\log_8(x+a)-\log_8(x-a)\right)+35a^2-6a-9=0$$

имеет ровно два решения.

Решение. Данное уравнения является квадратным относительно $t=\log_8(x+a)-\log_8(x-a)$. По теореме обратно теореме Виета, находим

$$\begin{cases} t_1+t_2=12a\\ t_1\cdot t_2=(7a+3)(5a-3)\end{cases}\iff\left[\begin{array}{l} t=7a+3\\ t=5a-3\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=7a+3\\ \log_8(x+a)-\log_8(x-a)=5a-3\end{array}\right.$$

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(|x-2|+|x+a|)^2-7\left(|x-2|+|x+a|\right)-4a(4a-7)=0$$

имеет ровно два решения.

Решение. Данное уравнения является квадратным относительно $t = |x-2| + |x+a|$. По теореме обратно теореме Виета, находим

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 7 \\ t_1 \cdot t_2 = 4a(7-4a) \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} t = 4a \\ t = 7-4a \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} |x-2| + |x+a| = 4a \\ |x-2| + |x+a| = 7-4a \end{array}\right.$$

Комментарий.

А. Рассмотрим функцию $y = |x-a| + |x-b|$, $a < b$. График такой функции – «корыто».

Б. Задачу можно решить методом областей. Рассмотрим плоскость xOa и 4 случая раскрытия модулей.

1. Если $x - 2 < 0$ и $a + x < 0$, то совокупность примет вид

$$\left[\begin{array}{l} x-2 \leqslant 0 \\ a+x \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} |x-2| + |x+a| = 4a \\ |x-2| + |x+a| = 7-4a \end{array}\right. \end{array}\right.$$

2. Если $x - 2 < 0$ и $a + x > 0$, то совокупность примет вид

$$\left[\begin{array}{l} x-2 < 0 \\ a+x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} |x-2| + |x+a| = 4a \\ |x-2| + |x+a| = 7-4a \end{array}\right. \end{array}\right.$$

3. Если $x - 2 > 0$ и $a + x < 0$, то совокупность примет вид

$$\left[\begin{array}{l} x-2 < 0 \\ a+x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} |x-2| + |x+a| = 4a \\ |x-2| + |x+a| = 7-4a \end{array}\right. \end{array}\right.$$

4. Если $x - 2 > 0$ и $a + x > 0$, то совокупность примет вид

$$\left[\begin{array}{l} x-2 < 0 \\ a+x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} |x-2| + |x+a| = 4a \\ |x-2| + |x+a| = 7-4a \end{array}\right. \end{array}\right.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(|x+7|-|x-a|)^2 - 13a\,(|x+7|-|x-a|) + 30a^2 + 21a - 9 = 0$$

имеет ровно два решения.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\big(x^2 - 4ax + a(4a-1)\big)^2 - 3\,\big(x^2 - 4ax + a(4a-1)\big) - |a|(|a|-3) = 0$$

имеет более двух корней.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(\operatorname{tg} x + 6)^2 - (a^2 + 2a + 8)\,(\operatorname{tg} x + 6) + a^2(2a+8) = 0$$

имеет на отрезке $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ ровно два решения.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(x + \frac{1}{x-a}\right)^2 - (a+9)\left(x + \frac{1}{x-a}\right) + 2a(9-a) = 0$$

имеет ровно четыре решения.

Решение. Данное уравнения является квадратным относительно $t = x + \dfrac{1}{x-a}$. По теореме обратно теореме Виета, находим

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = a + 9 \\ t_1 \cdot t_2 = 2a(9-a) \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} t = 2a \\ t = 9 - a \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{x-a} = 2a \\ x + \dfrac{1}{x-a} = 9 - a \end{array}\right.$$

Если $2a = 9 - a$, то есть $a = 3$, то уравнение имеет не более двух корней. Значит $a \neq 3$. При $a \neq 3$, имеем

$$\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{x-a} = 2a \\ x + \dfrac{1}{x-a} = 9 - a \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x^2 - 3ax + 2a^2 + 1 = 0 \\ x^2 - 9x - a^2 + 9a + 1 = 0 \end{array}\right.$$

9. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sin^{14} x + (a - 3\sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3\sin x$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(\sin^2 x)^7 + \sin^2 x = (3\sin x - a)^7 + 3\sin x - a \iff f(\sin^2 x) = f(3\sin x - a)$$

где $f(t) = t^7 + t$ – возрастает как сумма возрастающих функций. Имеем, равносилный переход

$$f(\sin^2 x) = f(3\sin x - a) \iff \sin^2 x = 3\sin x - a \iff a = 3\sin x - \sin^2 x$$

Обозначим $\sin x = t$, $t \in [-1;\, 1]$. Имеем $a = 3t - t^2$.

10. Найдите все значения параметра a, при которых для любого действительного x выполнено неравенство

$$|3\sin x + a^2 - 22| + |7\sin x + a + 12| \leqslant 11\sin x + |a^2 + a - 20| + 11$$

Задачи для самостоятельного решения

12. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (a+3)^4} = |x + a + 3| + |x - a - 3|$$

имеет единственное решение.

13. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2\sqrt{x^4 + (a-2)^4} = |x + a - 2| + |x - a + 2|$$

имеет единственное решение.

14. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение уравнения

$$3\sqrt[5]{6.2x - 5.2} + 4\log_5(4x + 1) + 5a = 0$$

принадлежит отрезку $[1;\, 6]$.

15. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(\log_7(2x + 2a) - \log_7(2x - 2a))^2 - 8a\,(\log_7(2x + 2a) - \log_7(2x - 2a)) + 12a^2 + 8a - 4 = 0$$

имеет ровно два решения.

16. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(\log_4(x + 2) - \log_4(x - 2))^2 - 11\,(\log_4(x + 2) - \log_4(x - 2)) - a^2 + 3a + 28 = 0$$

имеет ровно два решения.

17. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(|x + 2| + |x - a|)^2 - 5\,(|x + 2| + |x - a|) + 3a(5 - 3a) = 0$$

имеет ровно два решения.

18. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(|x+2|+|x-a|)^2-7\left(|x+2|+|x-a|\right)+2a(7-2a)=0$$

имеет ровно два решения.

19. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(|x-8|-|x-a|)^2-7a\left(|x-8|-|x-a|\right)+10a^2+6a-4=0$$

имеет ровно два решения.

Глава 6

Образцы заданий 2013 года

1. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение

$$\log_{1-x}(a-x+2)=2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1;\ 1)$.

39. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{x+1}(a+x-6)=2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1;1]$.

61. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$\log_{x+1}(x+5-a)=2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1;2]$.

66. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{1-x}(3-a-x)=2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-2;1)$.

2. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение

$$(4\cos x-3-a)\cdot\cos x-2.5\cos 2x+1.5=0$$

имеет хотя бы один корень.

40. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(6\sin x-2-3a)\cdot\sin x+3.5\cos 2x+0.5=0$$

имеет хотя бы один корень.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$$

имеет единственный корень.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-8 - 6x - x^2} = 2a + 1$$

имеет единственный корень.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-27 - 12x - x^2} = 7a + 3$$

имеет единственный корень.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$8a + \sqrt{7 + 6x - x^2} = ax + 4$$

имеет единственный корень.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$13a + \sqrt{35 + 2x - x^2} = ax + 6$$

имеет единственный корень.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x + 3 + a| = |x - a - 3| - (a + 3)^2$$

имеет единственный корень.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x + 2 + a| = |x - a - 2| - (a + 2)^2$$

имеет единственный корень.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x + 7 - a| = |x + a - 7| - (a - 7)^2$$

имеет единственный корень.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x + 6 - a| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$$

имеет единственный корень.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a - 3)^2 = |x + 3 - a| + |x + a - 3|$$

имеет единственный корень.

62. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a + 7)^2 = |x - 7 - a| + |x + a + 7|$$

имеет единственный корень.

63. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a - 5)^2 = |x + 5 - a| + |x + a - 5|$$

имеет единственный корень.

C5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение

$$a^2 - 10a + 5\sqrt{x^2 + 25} = 4|x - 5a| - 8|x|$$

имеет хотя бы один корень.

5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение

$$a^2 - 7a + 7\sqrt{2x^2 + 49} = 3|x - 7a| - 6|x|$$

имеет хотя бы один корень.

51. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 12a + 3\sqrt{4x^2 + 9} = 6|x - 3a| - 10|x|$$

имеет хотя бы один корень.

55. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 10a + 2\sqrt{5x^2 + 4} = 7|x - 2a| - 12|x|$$

имеет хотя бы один корень.

67. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 5a + 5\sqrt{2x^2 + 25} = 3|x - 5a| - 6|x|$$

имеет хотя бы один корень.

60. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 12a + 2\sqrt{7x^2 + 4} = 8|x - 2a| - 16|x|$$

имеет хотя бы один корень.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|\sin^2 x + 2\cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$$

имеет на промежутке $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственный корень.

36. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$|\cos^2 x + 2\sin x - 2a| = \cos^2 x + \sin x + 2a$$

имеет на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$ единственный корень.

47. Найдите все значения а, при которых уравнение

$$|3\cos^2 x + 18\sin x + a| = 3\cos^2 x + 17\sin x - a$$

имеет на промежутке $\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ единственный корень.

58. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$|2\sin^2 x + 8\cos x - 3a| = 2\sin^2 x + 7\cos x + 3a$$

имеет на промежутке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ единственный корень.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{7a}{a-5} \cdot 2^{|x|} = 4^{|x|} + \frac{12a + 17}{a - 5}$$

имеет ровно два различных корня.

C5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{4a}{a-6} \cdot 3^{|x|} = 9^{|x|} + \frac{3a + 4}{a - 6}$$

имеет ровно два различных корня.

34. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{3a}{a-5} \cdot 5^{|x|} = 25^{|x|} + \frac{2a+4}{a-5}$$

имеет ровно два различных корня.

45. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{5a}{a-3} \cdot 7^{x} = 49^{x} + \frac{6a+7}{a-3}$$

имеет ровно два различных корня.

8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2x^2 - 3x - 2| = a - 2x^2 - 8x$$

либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

103. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2x^2 + 3x - 2| = 8x - 2x^2 - a$$

либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

52. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - 2ax + 7| = |6a - x^2 - 2x - 1|$$

имеет более двух различных корней.

43. Найдите все значения a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющая неравенству

$$3|x-a| + 5|x+2| \leqslant \sqrt{9-y^2} + 9$$

48. Найдите все значения a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющая неравенству

$$3|x+4| + |x+a| \leqslant \sqrt{36-y^2} - 4$$

49. Найдите все значения a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющая неравенству

$$4|x+3| + 3|x-a| \leqslant \sqrt{16-y^2} + 2$$

54. Найдите все значения a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющая неравенству

$$5|x-2|+3|x+a| \leqslant \sqrt{4-y^2}+7$$

64. Найдите все значения a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющая неравенству

$$2|x-a|+7|x-3| \leqslant \sqrt{1-y^2}+5$$

65. Найдите все значения a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющая неравенству

$$5|x-2|+2|x+a| \leqslant \sqrt{25-y^2}-3$$

Глава 7

Образцы заданий 2012 года

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на множестве $1 \leqslant |x| \leqslant 3$ не меньше 6.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 + 2a + 2$$

на множестве $1 \leqslant |x| \leqslant 3$ не меньше 6.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на множестве $|x| \geqslant 1$ не меньше 6.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a|x-2| = \frac{3}{x+1}$$

на промежутке $[0; +\infty)$ имеет ровно два корня.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a|x-3| = \frac{5}{x+2}$$

на промежутке $[0; +\infty)$ имеет ровно два корня.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a|x-4| = \frac{5}{x+1}$$

на промежутке $[0; +\infty)$ имеет ровно два корня.

72. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a|x-5| = \frac{2}{x+1}$$

на промежутке $[0;+\infty)$ имеет ровно два корня.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 2$$

на промежутке $(0;\ +\infty)$ имеет более двух корней.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{6}{x} - 5\right| = ax - 1$$

на промежутке $(0;\ +\infty)$ имеет ровно один корень.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x} - 4\right| = ax - 1$$

на промежутке $(0;\ +\infty)$ имеет ровно один корень.

68. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{6}{x} - 2\right| = ax - 1$$

на промежутке $(0;\ +\infty)$ имеет ровно один корень.

70. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax - 1 = \left|\frac{5}{x} - 4\right|$$

на промежутке $(0;+\infty)$ имеет ровно один корень.

73. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax - 1 = \left|\frac{6}{x} - 5\right|$$

на промежутке $(0;+\infty)$ имеет ровно один корень.

85. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax - 1 = \left|\frac{5}{x} - 3\right|$$

на промежутке $(0; +\infty)$ имеет ровно один корень.

C5. Найдите все значения параметра параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 8x + a + 5| > 10$$

не имеет решений на отрезке $[a - 6;\ a]$.

C5. Найдите все значения параметра параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 4x + a| \leqslant 10$$

выполняется для всех $x \in [a - 6;\ a]$.

74. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 4x + a| \leqslant 10$$

выполняется для всех $x \in [a; a + 5]$.

80. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 6x + a| > 10$$

не имеет решений на отрезке $[a; a + 6]$.

98. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 4x + a - 5| \leqslant 10$$

выполняется для всех $x \in [a - 5; a]$.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1 - 2x} = a - 7|x|$$

имеет более двух решений.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1 - 2x} = a - 5|x|$$

имеет более двух решений.

79. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3 - 2x} = a - 3|x|$$

имеет более двух корней.

83. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2-4x} = a - 3|x|$$

имеет более двух корней.

89. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-4x} = a - 3|x|$$

имеет более двух корней.

105. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-2x} = a - 3|x|$$

имеет более двух корней.

C5. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|1 - 6\sqrt{x}| = 2(x + a)$$

имеет ровно два корня.

108. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых уравнение

$$|1 - 6\sqrt{x}| = 3(x + a)$$

имеет ровно два корня.

96. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых уравнение

$$|1 - 6\sqrt{x}| = 4(x + a)$$

имеет ровно два корня.

94. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых уравнение

$$|1 - 5\sqrt{x}| = 3(x + a)$$

имеет ровно два корня.

100. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых уравнение

$$|1 - 5\sqrt{5}| = 2(x + a)$$

имеет ровно два корня.

75. Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение

$$8x^6 + (a - |x|)^3 + 2x^2 - |x| + a = 0$$

имеет более трёх различных решений.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трех различных решений.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^4 + (a-3)^2 = |x - a + 3| + |x + a - 3|$$

имеет не более одного решения.

84. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^4 + (a-4)^2 = |x - a + 4| + |x + a - 4|$$

либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

102. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\left|\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$$

выполняется при всех x.

Глава 8

Образцы заданий 2011 года

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (4a+5)x + 3a^2 + 5a < 0 \\ x^2 + a^2 = 25 \end{cases}$$

имеет решения.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (8a+4)x + 7a^2 + 4a < 0 \\ x^2 + a^2 = 16 \end{cases}$$

имеет решения.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-4)^2 = 9 \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-5)^2 = 16 \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$$

имеет ровно три различных решения.

C5. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4 \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C5. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 6)^2 + (y - 12)^2 = 4 \\ (x - 1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C5. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4 \\ (x - 1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C5. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 3)^2 = 9 \\ (x + 1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{-5 + 6x - x^2} + 3 \\ y = \sqrt{4 - a^2 - 2ax - x^2} - a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{16 + 6x - x^2} + 3 \\ y = \sqrt{25 - a^2 + 2ax - x^2} + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{12 + 4x - x^2} + 2 \\ y = \sqrt{16 - a^2 + 2ax - x^2} + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 4)^2 + (|y| - 4)^2 = 4 \\ y = ax + 1 \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 7)^2 + (|y| - 7)^2 = 4 \\ y = ax + 1 \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 6)^2 + (|y| - 6)^2 = 4 \\ y = ax + 1 \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

C5. Найдите все значения параметра $\alpha \in [0;\, 2\pi)$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y - 4\sqrt{2})^2 = 16 \\ (x - \cos\alpha)^2 + (y - \sin\alpha)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

C5. Найдите все значения параметра $\alpha \in [0;\, 2\pi)$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y + 4\sqrt{2})^2 = 16 \\ (x - \cos\alpha)^2 + (y - \sin\alpha)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

C5. Найдите все значения параметра $\alpha \in [0;\, 2\pi)$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y + 8\sqrt{2})^2 = 64 \\ (x - 2\cos\alpha)^2 + (y - 2\sin\alpha)^2 = 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 6 \cdot |x| + 7 = 5y + 6x^2 + 4a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|+2} + 3 \cdot |x| + 5 = 4y + 3x^2 + 2a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 7 \cdot 2^{|x|} + 2 \cdot |x| + 6 = 7y + 2x^2 + 5a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Глава 9

Образцы заданий 2010 года

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 8x + 7|$ меньше 1.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 15|$ меньше 1.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 6x + 5|$ меньше 1.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 6x$ имеет более двух точек экстремума.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$ имеет более двух точек экстремума.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - |x - a^2| - 5x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 8|x - a| - 2x$ на отрезке $[-4;\ 7]$ не принимается ни на одном из концов этого отрезка.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = -x^2 + 8|x - a| + 2x$ на отрезке $[-7;\ 7]$ не принимается ни на одном из концов этого отрезка.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 11|x - a| - x$ на отрезке $[-8;\ 7]$ не принимается ни на одном из концов этого отрезка.

C5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых любая прямая, перпендикулярная оси ординат, имеет нечетное число общих точек с графиком функции $f(x) = (2a - 3)x - (x + 3)|x - a|$.

С5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых любая прямая, перпендикулярная оси ординат, имеет нечетное число общих точек с графиком функции $f(x) = (5a+3)x-(x+3)|x-a|$.

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует прямая, перпендикулярная оси ординат и имеющая четное число общих точек с графиком функции $f(x) = (5a+1)x-(x-2)|x-a|$.