Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Вариант № 1

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности. На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов №1.

Ответ: –15,5 .

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов №2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, или капиллярной, или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Ответом к заданиям* 1–12 *является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №* 1 *справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

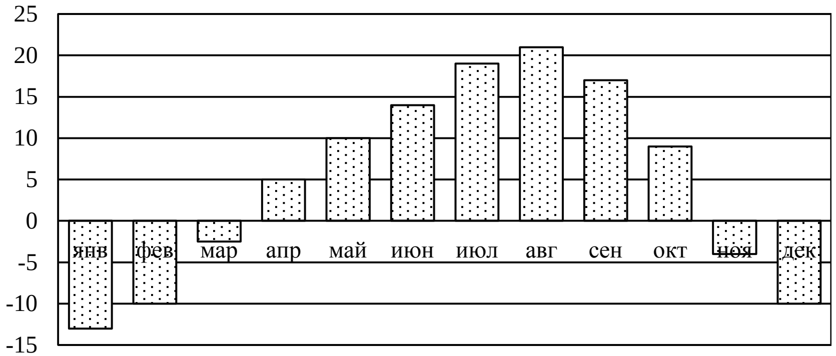
Часть 1.

1. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 5% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 0,4 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте трёх месяцев и весом 5 кг в течение суток?

Ответ:____________________________.

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Омске за каждый месяц 1973 года.

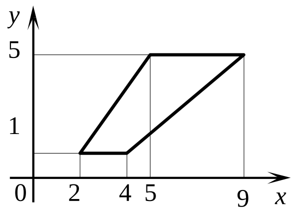
По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия.



Определите по приведённой диаграмме, сколько месяцев, от начала года до октября включительно, среднемесячная температура превышала -5 градусов Цельсия.

Ответ:____________________________.

3. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ:__________________________________.

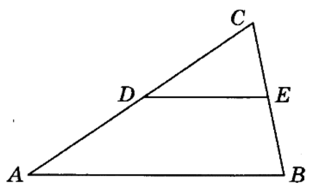
4. Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 17 спортсменов из России, в том числе Денис Полянкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Денис Полянкин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

Ответ:__________________________________.

5. Решите уравнение $\log_x 32 = 5$.

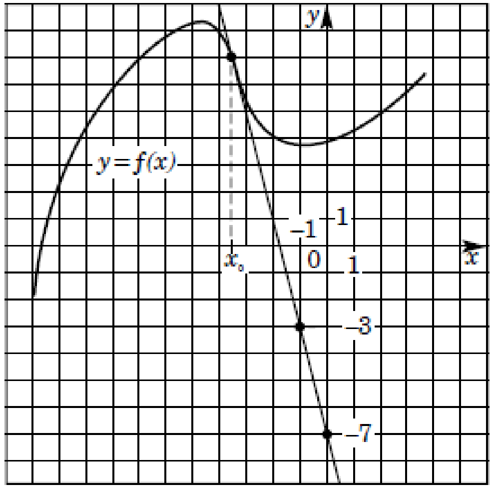
Ответ:__________________________________.

6. Площадь треугольника ABC равна 36, DE — средняя линия треугольника, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



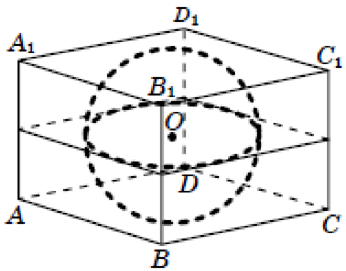
Ответ:__________________________________.

7. На рисунке изображен график функции $f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:__________________________________.

8. В прямоугольный параллелепипед вписана сфера с радиусом 4. Найдите объём параллелепипеда.



Ответ:__________________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2.

9. Найдите значение выражения $3^{\log_3 7} + 49^{\log_7 \sqrt{13}}$

Ответ:__________________________________.

10. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температура нагревателя T_1(в градусах Кельвина) КПД этого двигателя будет не меньше 80%, если температура холодильника $T_2 = 200\ K$?

Ответ:__________________________________.

11. Два автомобиля отправляются в 420-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 час раньше второго. Найдите скорость автомобиля, пришедшего к финишу вторым.

Ответ:__________________________________.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{x-7}(x^2 - 9x + 9)$ на отрезке [6; 8].

Ответ:__________________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

13. а) Решите уравнение: $4\sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{ctg} x$.

б) Найдите все корни данного уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

14. В основании пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 15$ и $BC = 9$. Точка M – середина ребра AD. На ребре BC выбрана точка E так, что $CE = 3$, а на ребре AC выбрана точка F так, что $CF = 5$. Плоскость MEF пересекает ребро BD в точке N. Расстояние от точки M до прямой EF равно $\sqrt{34}$.

а) Докажите, что N– середина ребра BD.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MNF.

15. Решите неравенство $\log_{2^{|2x-1|}}(2^{2x+1} - 2^{x+2} + 2) \le \frac{x}{|2x-1|}$.

16. В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O, величина угла AOC составляет $120°$.

а) Докажите, что около четырехугольника $BDOE$ можно описать окружность.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = 4$, а $\angle BED = 75°$.

17. 15 января Антон взял в кредит 3 миллиона рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го февраля, апреля и июня долг должен быть на одну девятую часть от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15 числа предыдущего месяца;

– 15-го марта, мая и июля долг должен быть на две девятых части от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15 числа предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 220 тысяч рублей больше суммы, взятой в кредит. Найдите r

18. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a+1)\mathrm{tg}^2 x - \frac{\mathrm{tg}\, x}{\cos x} + a = 0$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

19. Агата добиралась от дома до института на своем автомобиле с постоянной скоростью 100 км/ч. Обратно она ехала с постоянной скоростью, которая измерялась целым числом километров в час, причем путь до дома занял у нее больше времени, чем путь до института.

а) Могла ли ее средняя скорость за эти две поездки составить 90 км/ч?

б) Могла ли ее средняя скорость за эти две поездки оказаться равной целому числу километров в час?

в) Какое наименьшее целое число километров в час могла составлять ее средняя скорость за эти две поездки?

Ключи к заданиям 1 варианта профильного экзамена

№ задания	Ответ
1	2
2	8
3	12
4	0,64
5	2
6	27
7	–4
8	512
9	20
10	1000
11	60
12	–5
13	а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k; (-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2} \mid k\in Z\right\}$; б) $\left\{-\frac{59\pi}{12}; -\frac{55\pi}{12}; -\frac{9\pi}{2}\right\}$.
14	42,5
15	$[-1;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right]$
16	$2\sqrt{3}$
17	2
18	$-\frac{3}{4}\leq a\leq 0$ или $a=\frac{1}{4}$
19	а) нет, б) да, в) 40 км/ч

Ключи к заданиям 2 варианта профильного экзамена

№ задания	Ответ
1	3
2	8
3	27
4	0,08
5	3
6	6
7	$-0,2$
8	1000
9	20
10	500
11	10
12	20
13	а) $\left\{\pi k;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2} \mid k\in Z\right\}$; б) $\left\{-4\pi; -\frac{41\pi}{12}; -\frac{37\pi}{12}; -3\pi\right\}$.
14	51,25
15	$\left[-1;-\frac{1}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup(0;1]$
16	$8\sqrt{3}$
17	3
18	$0\leq a\leq\frac{3}{4}$или $a=-\frac{1}{4}$
19	а) нет, б) да, в) 60 км/ч.

1/4

Решения и критерии оценивания выполнения заданий 13—19

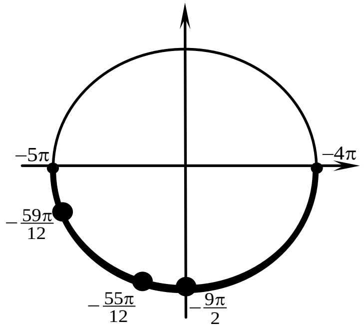
13. а) Решите уравнение $4\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg}x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi;-4\pi]$.

Решение. а) $4\cos^2 x=\operatorname{ctg}x$; $\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ 4\cos x=\frac{1}{\sin x}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin 2x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ 2x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\end{array}\right.$; $где k\in Z$.

б) Из первой серии указанному промежутку принадлежит одна точка $-\frac{9\pi}{2}$, а из второй – две точки: $-\frac{59\pi}{12}$ и $-\frac{55\pi}{12}$.



Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\mid k\in Z\right\}$;

б) $\left\{-\frac{59\pi}{12};-\frac{55\pi}{12};-\frac{9\pi}{2}\right\}$.

Критерии оценивания выполнения задания 13	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) и верно отобраны корни в пункте б)	2
Верно выполнен пункт а) ИЛИ Полученный в пунктах а) и б) ответ неверен в результате ОДНОЙ допущенной арифметической ошибки (описки), не повлиявшей принципиально на ход решения и не упростившей задачу ИЛИ Пункт а) доведен до верных простейших уравнений, которые решены с ошибкой. При этом конкретные решения простейших уравнений, необходимые для пункта б), отобраны верно, и, следовательно, ответ в пункте б) верен **Замечание.** Отбор корней может быть произведен любым способом: на единичной окружности, перебором значений k и т.д., **но обязательно показан!**	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

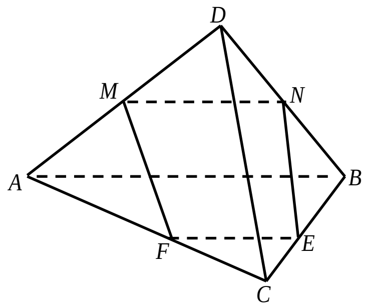
14. В основании пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=15$ и $BC=9$. Точка M– середина ребра AD. На ребре BC выбрана точка E так, что $CE=3$, а на ребре AC выбрана точка F так, что $CF=5$. Плоскость MEF пересекает ребро BD в точке N. Расстояние от точки Mдо прямой EF равно $\sqrt{34}$.

а) Докажите, что N– середина ребра BD.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостьюMNF.

Решение. а) Так как треугольники FECи ABC имеют общий угол и CF:CA = CE:CB = 1:3, то эти треугольники подобны. Значит, $\angle CFE=\angle CAB$, откуда $FE\parallel AB$. Тогда $EF\parallel(ABD)$ и плоскость MEF пересекает плоскость ABD по прямой, параллельной прямой EF, а, следовательно, параллельной AB. Таким образом, отрезок MN — средняя линия треугольника ABD и точка N – середина ребра BD.

б) Сечение пирамиды плоскостью MNE— трапеция, высота h которой равна расстоянию от точки Mдо прямой EF, то есть $h=\sqrt{34}$.



Далее имеем: $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=3\sqrt{34}$, $EF=\frac{1}{3}AB=\sqrt{34}$, $MN=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}\sqrt{34}$.

Окончательно получаем:

$$S_{MNEF}=\frac{MN+EF}{2}\cdot h=\frac{5\sqrt{34}}{4}\cdot\sqrt{34}=42{,}5.$$

Ответ:42,5.

Критерии оценивания выполнения задания 14	Баллы
Имеется верное доказательство в пункте а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	2
Имеется верное доказательство в пункте а) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) **(даже в том случае, если учащийся опирался на невыполненное или выполненное неверно задание а)** ИЛИ Имеется верное доказательство в пункте а) и обоснованно получен ответ в пункте б), неверный из-за **арифметической** ошибки (описки)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

15. Решите неравенство $\log_{2^{|2x-1|}}(2^{2x+1}-2^{x+2}+2)\le \frac{x}{|2x-1|}$..

Решение.Поскольку $2^{2x+1}-2^{x+2}+2=2(2^x-1)^2$, при условии $x\ne 0$ и $x\ne \frac{1}{2}$ имеем:

$\log_{2^{|2x-1|}}(2^{2x+1}-2^{x+2}+2)\le \frac{x}{|2x-1|}$; $\frac{1}{|2x-1|}\log_2(2^{2x+1}-2^{x+2}+2)\le \frac{x}{|2x-1|}$;

$\log_2(2^{2x+1}-2^{x+2}+2)\le x$; $2^{2x+1}-2^{x+2}+2\le 2^x$; $2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+2\le 0$;

$(2^x-2)(2\cdot 2^x-1)\le 0$; $2^x\in\left[\frac{1}{2};\,2\right]$; $x\in[-1;1]$.

С учетом условий $x\ne 0$ и $x\ne 1$, окончательный получаем: $x\in[-1;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right]$.

Ответ:$[-1;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания 15	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного потерей точки $x=\pm 1$. **Если в ответ или в ОДЗ включено значение переменной, при котором одна часть(или обе части) неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов»**. ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

16. В треугольнике ABC биссектрисы ADи CE пересекаются в точке O, величина угла AOC составляет $120°$.

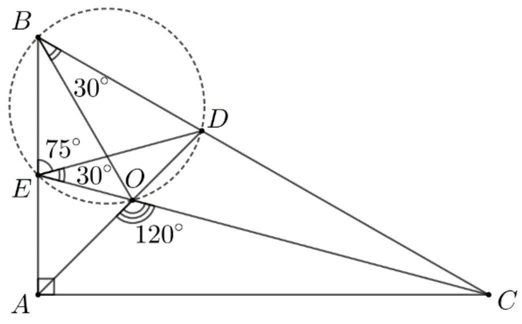
а) Докажите, что около четырехугольника $BDOE$можно описать окружность.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BC=4$, а $\angle BED=75°$.

Решение. а) В треугольнике AOC сумма углов $\angle OAC+\angle OCA=180°-120°=60°$, но величины углов $\angle OAC$и $\angle OCA$ составляют половины величин углов $\angle BAC$ и $\angle BCA$, а значит, сумма углов $\angle BAC+\angle BCA=2\cdot 60°=120°$. Тогда величина угла $\angle ABC=180°-(\angle BAC+\angle BCA)=60°$.

Вертикальные углы $\angle EOD$ и $\angle AOC$ равны и, значит,сумма противоположных углов четырехугольника $BDOE$ равна $180°$. Следовательно, около него можно описать окружность.

б) В треугольнике ABC биссектрисы пересекаются в точке O, значит, BO – биссектриса угла $\angle ABC$, а, значит, $\angle DBO=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$. Углы $\angle DBO$ и $\angle DEO$ равны, так как опираются на одну и ту же дугу окружности, описанной около четырехугольника $BDOE$. Имеем:



1) $\angle AEO=180°-(\angle BED+\angle DEO)=180°-(75°+30°)=75°$;

2)$\angle EAO=\angle AOC-\angle AEO=120°-75°=45°$, по теореме о внешнем угле треугольника;

3)$\angle BAC=2\cdot\angle EAO=90°$.Таким образом, треугольник ABC – прямоугольный и его площадь равна$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cos 60°\cdot BC\sin 60°=2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания 16	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Не доказано утверждения пункта а), но обоснованно получен верный ответ в пункте б) без использования утверждения пункта а) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а), получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности.	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при неверном доказательстве утверждения пункта а) и обоснованном решении пункта б) без использования утверждения пункта а)получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен или выполнен неверно ИЛИ получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***3***

17. 15 января Антон взял в кредит 3 миллиона рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на *r*% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го февраля, апреля и июня долг должен быть на одну девятую часть от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15 числа предыдущего месяца;
– 15-го марта, мая и июля долг должен быть на две девятых части от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15 числа предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 220 тысяч рублей больше суммы, взятой в кредит. Найдите *r*.

Решение.Пусть исходная сумма, взятая в кредит, была равнаS млн. руб. и пусть$k = 1 + \frac{r}{100}$. Тогда ежемесячные выплаты были равны:

$$Sk - \frac{8}{9}S;\quad \frac{8}{9}Sk - \frac{6}{9}S;\quad \frac{6}{9}Sk - \frac{5}{9}S;\quad \frac{5}{9}Sk - \frac{3}{9}S;\quad \frac{3}{9}Sk - \frac{2}{9}S;\quad \frac{2}{9}Sk\,.$$

Следовательно, общая сумма выплат составит:

$$Sk\left(1 + \frac{8}{9} + \frac{6}{9} + \frac{5}{9} + \frac{3}{9} + \frac{2}{9}\right) - S\left(\frac{8}{9} + \frac{6}{9} + \frac{5}{9} + \frac{3}{9} + \frac{2}{9}\right) \text{ или } \left(\frac{11}{3}Sk - \frac{8}{3}S\right).$$

По условию данное выражение на 220 тысяч рублей превышает S, следовательно, можно составить уравнение: $\left(\frac{11}{3}Sk - \frac{8}{3}S\right) - S = 0{,}22.$

Подставляя в это уравнение $S = 3$, получаем: $11k - 11 = 0{,}22$; $k = 1{,}02$; $r = 2$.

Ответ: 2.

Критерии оценивания выполнения задания 17	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верный ответ получен, но недостаточно обоснован ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	2
Верно построена математическая модель, но дальнейшее решение неверно или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***3***

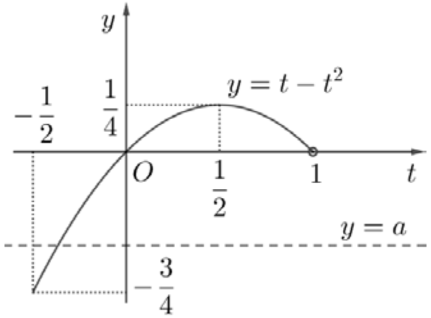
18. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a+1)\mathrm{tg}^2 x - \frac{\mathrm{tg}\, x}{\cos x} + a = 0$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Преобразуем данное уравнение:

$$\frac{1}{\cos^2 x}\left((a+1)\sin^2 x - \sin x + a\cos^2 x\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \sin^2 x = a, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$



Так как функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ принимает каждое свое значение ровно один раз, а $\cos x = 0$ только в точке $x = \frac{\pi}{2}$, то полученная система имеет на этом отрезке единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение $t - t^2 = a$ имеет ровно одно решение на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right)$, т.е. при $-\frac{3}{4} \le a \le 0$ или при $a = \frac{1}{4}$ (см. рисунок).

Ответ:$-\frac{3}{4} \le a \le 0$ или $a = \frac{1}{4}$.

4/4

Критерии оценивания выполнения задания 18	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
Выполнены все шаги решения, обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением значения $a = -3/4$ ИЛИ Выполнены все шаги решения, получен неверный ответ из-за одной арифметической ошибки или описки	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением значений $a = 1/4$ и/или $a = 0$	2
Решение задачи сведено к исследованию квадратного уравнения, получены значения $a = 1/4$ или $a = -3/4$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***

19. Агата добиралась от дома до института на своем автомобиле с постоянной скоростью 100 км/ч. Обратно она ехала с постоянной скоростью, которая измерялась целым числом километров в час, причем путь до дома занял у нее больше времени, чем путь до института.

а) Могла ли ее средняя скорость за эти две поездки составить 90 км/ч?

б) Могла ли ее средняя скорость за эти две поездки оказаться равной целому числу километров в час?

в) Какое наименьшее целое число километров в час могла составлять ее средняя скорость за эти две поездки?

Решение. Пусть скорость Агаты на обратном пути составила x км/ч, а путь от дома до института составляет S км. Тогда средняя скорость Агаты будет равна

$$V_{\text{ср}} = \frac{2S}{\frac{S}{100}+\frac{S}{x}}; \quad V_{\text{ср}} = \frac{200x}{x+100} \text{ км/ч.}$$

а) Нет, не могла. Пусть средняя скорость составила 90 км/ч. Тогда

$$\frac{200x}{x+100} = 90; \quad 200x = 90x + 9000; 110x = 9000; x = \frac{900}{11},$$

что противоречит целочисленности x.

б) Да, могла. Если $x = 60$ км/ч, то $V_{\text{ср}} = \frac{200\cdot 60}{160}$; $V_{\text{ср}} = 75$ км/ч.

в) Чем меньше x, тем меньше средняя скорость.

Так как $\frac{200x}{x+100}$ – целое, то $200x \vdots (x+100)$. Но $200(x+100) \vdots (x+100)$, значит $20000 \vdots (x+100)$. Так как $20000 = 2^5 \cdot 5^4$, то $x + 100 = 2^k \cdot 5^m$, где $k \leq 5,\ m \leq 4$. При этом, так как $x \in (0; 100)$, то $(x+100) \in (100; 200)$. (*)

1) $m = 0$. Тогда $x + 100 \leq 2^5$, что противоречит (*).
2) $m = 1$. Тогда $x + 100 = 5 \cdot 2^k$. Данное выражение находится в интервале (100; 200) только при $k = 5$, то есть $x = 60$.
3) $m = 2$. Тогда $x + 100 = 25 \cdot 2^k$. Данное выражение не находится в интервале (100; 200) ни при каких k.
4) $m = 3$. Тогда $x + 100 = 125 \cdot 2^k$. Данное выражение находится в интервале (100; 200) только при $k = 0$, то есть $x = 25$.

Таким образом, наименьшее значение средней скорости достигается при $x = 25$ км/ч, а тогда средняя скорость равна:

$$V_{\text{ср}} = \frac{5000}{125}; \quad V_{\text{ср}} = 40 \text{ км/ч.}$$

Ответ: а) нет, б) да, в) 40 км/ч.

Критерии оценивания выполнения задания 19	**Баллы**
Верно получены все перечисленные результаты (см. критерий на 1 балл)	4
Верно получены три из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	3
Верно получены два из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	2
Верно получен один из перечисленных результатов: — обоснованное решение пункта а); — верный пример в пункте б); — проведён анализ возможных значений средней скорости; — верно указано наименьшее возможное значение средней скорости..	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***