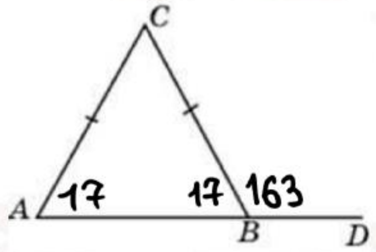
1 В треугольнике ABC стороны AC и BC равны. Внешний угол при вершине B равен $163°$. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

ИСТОЧНИКИ



$180 - 2 \cdot 17 = 146$

ОТВЕТ 146

2 Даны векторы $\vec{a}\ (-13; 4)$ и $\vec{b}\ (-6; 1)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

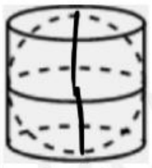
ИСТОЧНИКИ

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -13 \cdot (-6) + 4 \cdot 1 = 82$

ОТВЕТ 82

3.1 Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 48. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

ИСТОЧНИКИ



① $S_{сферы} = 4\pi R^2 = 48$
$\pi R^2 = 12$

② $S_{полн.пов.\ цил.} = 2\pi R^2 + 2\pi R h$
$2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2 = 6 \cdot 12 = 72$

ОТВЕТ 72

3.2 Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 50. Найдите объём цилиндра.

ИСТОЧНИКИ

① $V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 50$
$\pi R^3 = \frac{50 \cdot 3}{4} = \frac{75}{2}$

② $V_{ц} = \pi R^2 \cdot h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = 2 \cdot \frac{75}{2} = 75$

ОТВЕТ 75

4 Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся А. верно решит больше 9 задач, равна 0,63. Вероятность того, что А. верно решит больше 8 задач, равна 0,75. Найдите вероятность того, что А. верно решит ровно 9 задач.

ИСТОЧНИКИ

...
7
8
9 ? } 0,12
10
11
...

} 0,63 } 0,75

ОТВЕТ 0,12

5 Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 8».

ИСТОЧНИКИ

11	21	31	41	51	~~61~~
12	22	32	42	52	~~62~~
13	23	33	43	53	~~63~~
14	24	34	44	54	~~64~~
15	25	35	45	55	~~65~~
~~16~~	~~26~~	~~36~~	~~46~~	~~56~~	~~66~~

$$P = \frac{3}{25} = 0{,}12$$

ОТВЕТ 0,12

6 Найдите корень уравнения

$3^{2x-16} = \frac{1}{81}$.

ИСТОЧНИКИ

$3^{2x-16} = 3^{-4}$

$2x - 16 = -4$

$2x = 12$

$x = 6$

ОТВЕТ 6

7 Найдите значение выражения

$\log_2 240 - \log_2 3{,}75$.

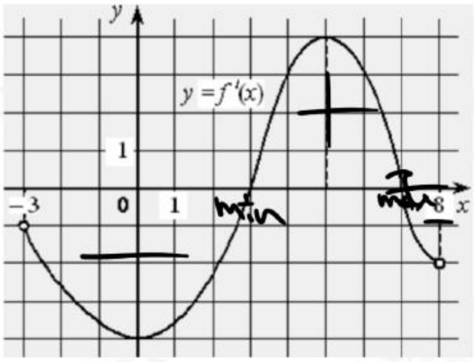
ИСТОЧНИКИ

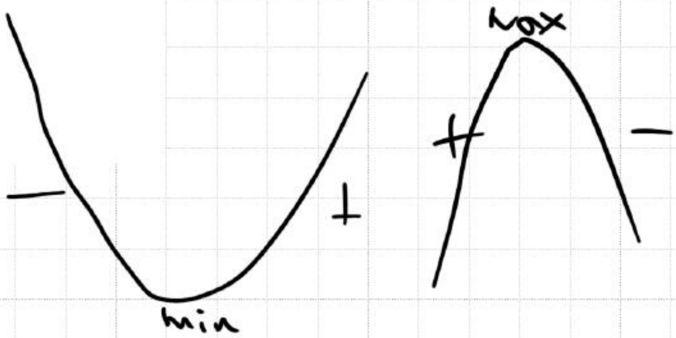
$\log_2 \frac{240 \cdot 4}{15} = \log_2 64 = 6$

ОТВЕТ 6

8 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ − производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.

ИСТОЧНИКИ





ОТВЕТ 7

9 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч^2). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l − пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 1,1 км, приобрести скорость 110 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

ИСТОЧНИКИ

$$110 = \sqrt{2 \cdot 1{,}1 \cdot a} \quad |^2$$

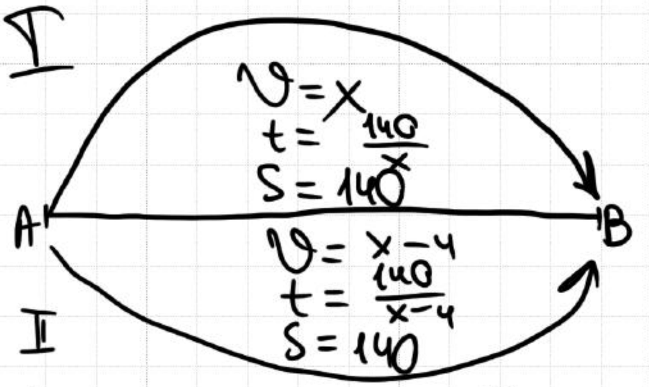
$$110 \cdot 110 = \frac{2 \cdot 11}{10} \cdot a$$

$$a = \frac{\cancel{110}^{10} \cdot \cancel{110}^{55} \cdot 10}{\cancel{2} \cdot \cancel{11}} = 5500$$

ОТВЕТ 5500

10 Два велосипедиста одновременно отправились в 140-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

ИСТОЧНИКИ



$t_{медл} - t_{быстр} = 4$

$\frac{140^{(x}}{x-4} - \frac{140^{(x-4}}{x} = 4$

$$\frac{\cancel{140x} - \cancel{140x} + 140\cdot 4}{x(x-4)} = 4$$

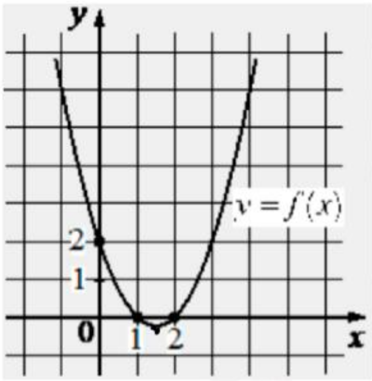
$x^2 - 4x - 140 = 0$

$x = 14 \qquad \cancel{x = -10}$

ОТВЕТ 14

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-2)$.

ИСТОЧНИКИ



① $a = 1$

$c = 2$

$f(x) = x^2 + bx + 2$

② $x_0 = 1{,}5 = \frac{-b}{2a}$

$1{,}5 = \frac{-b}{2} \qquad b = -3$

$f(x) = x^2 - 3x + 2$

③ $f(-2) = (-2)^2 - 3\cdot(-2) + 2 = 12$

ОТВЕТ 12

12 Найдите точку максимума функции

$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5.$

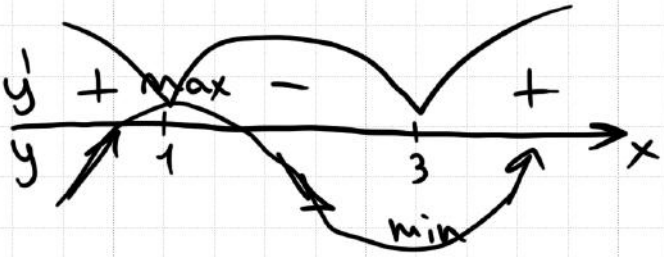
ИСТОЧНИКИ

① $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad |:3$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 1 \qquad x = 3$

②



ОТВЕТ 1

13 а) Решите уравнение

$$2\cos x + \sin^2 x = 2\cos^3 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

ИСТОЧНИКИ

а) $2\cos x + 1 - \cos^2 x - 2\cos^3 x = 0$

$(2\cos x + 1) - \cos^2 x \cdot (2\cos x + 1) = 0$

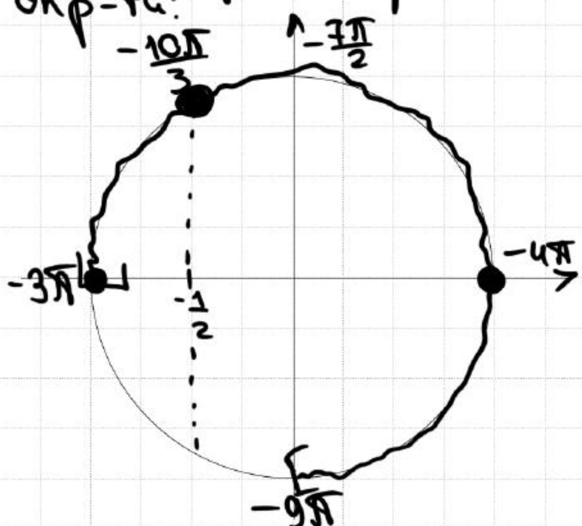
$(2\cos x + 1) \cdot (1 - \cos^2 x) = 0$

$\cos x = -\frac{1}{2} \qquad \cos^2 x = 1$

$\cos x = \pm 1$

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \qquad x = \pi n, n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окр-ти:



Получим:

$x = -3\pi$

$x = -4\pi$

$x = -\frac{3\pi}{1}^{(3} - \frac{\pi}{3} = -\frac{10\pi}{3}$

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, πn; $n \in Z$

б) -4π; $-\frac{10\pi}{3}$; -3π.

14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 6$. Через точки B_1 и D параллельно AC проведена плоскость, пересекающая ребро CC_1 в точке K.

а) Докажите, что K — середина CC_1.
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения.

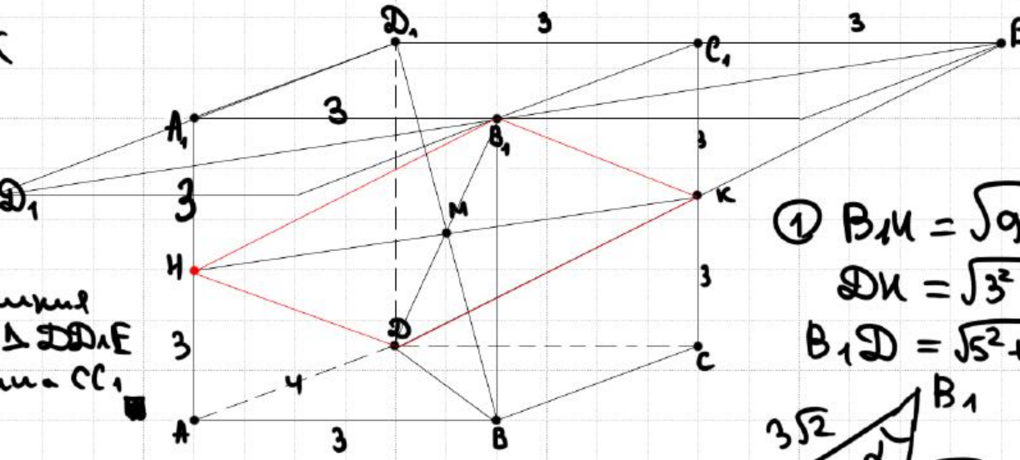
а) Проведём B_1E такую, что $B_1E \parallel AC$, причём $C_1E = C_1D_1 = 3$

$ED \cap CC_1 = K$

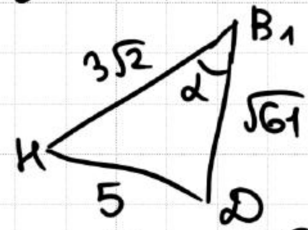
$\triangle EDD_1$:
C_1 - середина ED_1
$C_1K \parallel DD_1$
Тогда C_1K - ср. линия $\triangle DD_1E$
Тогда K - середина CC_1 ■

б) Пусть h - искомое расст.

$V_{BB_1DH} = \cancel{\frac{1}{3}} S_{B_1DH} \cdot h = \cancel{\frac{1}{3}} S_{BB_1H} \cdot AD$



① $B_1H = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$
$DH = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
$B_1D = \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61}$



$$\cos\alpha = \frac{18+61-25}{2\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{61}} = \frac{\cancel{54}\,9}{\cancel{6}\sqrt{122}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{122}}$$

Получаем

$$\cancel{\frac{1}{2}}\cdot \cancel{3\sqrt{2}}\cdot\cancel{\sqrt{61}}\cdot\frac{\sqrt{41}}{\cancel{\sqrt{122}}}\cdot h = \cancel{\frac{1}{2}}\cdot 6\cdot \cancel{3}\cdot 4$$

$$h = \frac{24}{\sqrt{41}}$$

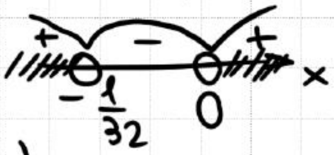
15 Решите неравенство

$$\log_{11}(2x^2+1)+\log_{11}\left(\frac{1}{32x}+1\right)\ge \log_{11}\left(\frac{x}{16}+1\right).$$

$$\begin{cases} ① \; 2x^2+1>0 \\ ② \; \frac{1}{32x}+1>0 \\ ③ \; \frac{x}{16}+1>0 \quad |\cdot 16 \\ ④ \; (2x^2+1)\left(\frac{1}{32x}+1\right)\ge \frac{x}{16}+1 \end{cases}$$

① x – любое

② $\frac{1+32x}{32x}>0$



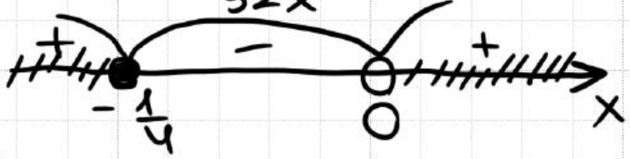
③ $x+16>0$

$x>-16$

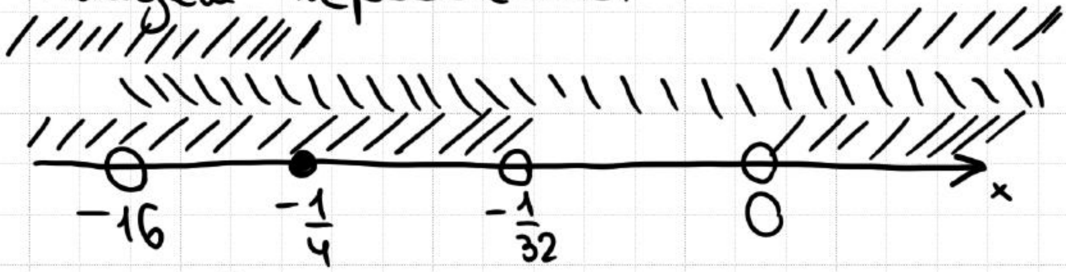
④ $(2x^2+1)\cdot\left(\frac{1+32x}{32x}\right)\ge\frac{x}{16}+1$

$$\frac{2x^2+1+64x^3+32x}{32x}-\frac{x}{16}^{\backslash 2x}-\frac{1}{1}^{\backslash 32x}\ge 0$$

$$\frac{\cancel{2x^2}+1+64x^3+\cancel{32x}-\cancel{2x^2}-\cancel{32x}}{32x}\ge 0$$



Найдём пересечение:



Ответ: $(-16;-\frac{1}{4}]\cup(0;+\infty)$

16 Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий.

Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 200 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, - 300 рублей.

Вадим готов выделять 1 200 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

	часы	единицы товара
I	x^2	x
II	y^2	y

① Выразим y

$$x^2\cdot 200 + y^2\cdot 300 = 1\,200\,000 \quad \Big|:100$$

$$2x^2+3y^2=12\,000$$

$$3y^2=12000-2x^2$$

$$y^2=4000-\frac{2}{3}x^2$$

$$y=\sqrt{4000-\frac{2}{3}x^2}$$, где $x\geq 0$, $4000-\frac{2}{3}x^2\geq 0$

$$\begin{cases} x\geq 0\\ 6000-x^2\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 0\\ -\sqrt{6000}\leq x\leq\sqrt{6000}\end{cases} \Rightarrow x\in[0;\sqrt{6000}]$$

② Надо найти наиб. знач. $x+y$

$$f(x)=x+\sqrt{4000-\frac{2}{3}x^2}$$

$$f'(x)=1+\frac{1\cdot\left(-\frac{4}{3}x\right)}{2\sqrt{4000-\frac{2}{3}x^2}}=0$$

$$1=\frac{2x}{3\sqrt{4000-\frac{2}{3}x^2}}$$

$$3\sqrt{4000-\frac{2}{3}x^2}=2x$$

$$\sqrt{4000-\frac{2}{3}x^2}=\frac{2x}{3}$$

$$\begin{cases}\frac{2x}{3}\geq 0\\ 4000-\frac{2}{3}x^2=\frac{4}{9}x^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geq 0\\ \frac{10}{9}x^2=4000\end{cases}$$

$$x^2=3600$$

$$x=60$$

$f'(x)$: $+$ на $(0;60)$, $-$ на $(60;\sqrt{6000})$; max в $x=60$

$f(x)$: $0 \nearrow 60 \searrow \sqrt{6000}$

$$f(60)=f_{наиб}=60+\sqrt{4000-\frac{2}{3}\cdot 3600}=100$$

Ответ: 100.

17.1 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC, если $AH = 8\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60°$.

а) Пусть $\angle AHB_1 = \alpha$

Тогда $\angle BHK = \alpha$ (верт.)

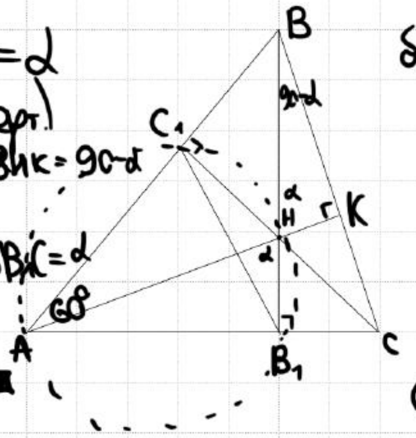
$\angle HBK = 180 - \angle BKH - \angle BHK = 90 - \alpha$

$\triangle BB_1C$:

$\angle BCB_1 = 180 - \angle CBB_1 - \angle BB_1C = \alpha$

Получаем

$\angle AHB_1 = \alpha = \angle ACB$ ■



б) ① $\angle AC_1H = 90°$ – эти углы

$\angle AB_1H = 90°$ опир. на AH

Можно описать окр-ть около AC_1HB_1 с диаметром AH

② $\triangle AB_1C_1$: по т. sin:

$$\frac{B_1C_1}{\sin 60°} = 2R = AH$$

$$B_1C_1 = 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$$

③ $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ по 2 пропорц. и углу

$$\cos A = \frac{AB_1}{AB} = \frac{AC}{AC}$$ и $\angle 60$-общ

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \cos 60°$$

$$BC = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$$

Ответ: 24.

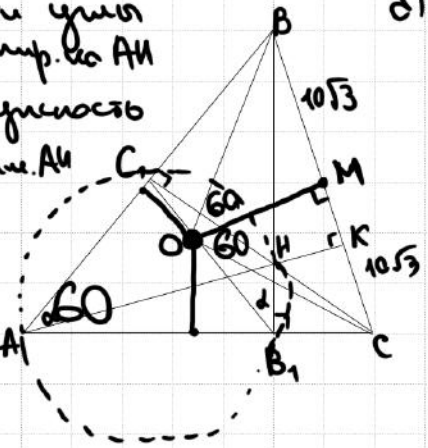
17.2 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны BC, если $B_1C_1 = 10\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60°$.

а) ① $\angle AC_1H = 90°$ – эти углы
$\angle AB_1H = 90°$ опир. на AH

Можно описать окружность около AC_1HB_1 с диам. AH



② $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$ как вписанные, опир. на одну и ту же дугу

б) O – центр опис. окр. или точка пересеч. сер. перп.
M – середина BC
OM – искомое расстояние

① $\angle BAC$ – впис. $= 60°$
$\angle BOC$ – центр. $= 120°$

② $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ по 2 пропорц. и 60° между

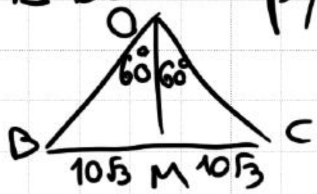
$$\cos 60° = \frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} \text{ и } 60°$$

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \cos 60°$$

$$BC = 20\sqrt{3}$$

③ $\triangle BOC$ – р/б.



$$tg\,60° = \frac{BM}{OM}$$

$$OM = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10$$

Ответ: 10.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{3x^2-(3a+1)x+a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Упростим подкоренное выр-е $3x^2-3ax-x+a$

$3x(x-a)-(x-a)$

$(x-a)(3x-1)$

Получаем

$$\sqrt{(x-a)(x+a)}=\sqrt{(x-a)(3x-1)}$$

$$\begin{cases}(x-a)(x+a)=(x-a)(3x-1)\\(x-a)(x+a)\geq 0\\0\leq x\leq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-a)\cdot(x+a-3x+1)=0\\(x-a)(x+a)\geq 0\\0\leq x\leq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a\\x=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\end{array}\right.\\(x-a)(x+a)\geq 0\\0\leq x\leq 1\end{cases}$$

$x=a$ явл. корнем ур-я на отрезке при a, удовл. $\begin{cases}(a-a)(a+a)\geq 0\\0\leq a\leq 1\end{cases}$

$\Rightarrow$ при $0\leq a\leq 1$ $x=a$ явл.

$x=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}$ явл. к. ур-я на отрезке при a, удовл. $\begin{cases}(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-a)(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}+a)\geq 0 & ①\\0\leq\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\leq 1 & ②\end{cases}$

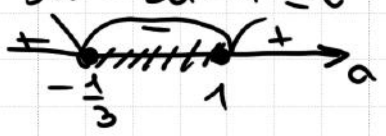
① $\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{3a}{2}+\frac{1}{2}\right)\geq 0 \quad |\cdot 2\cdot 2$

$(1-a)(3a+1)\geq 0$

$3a+1-3a^2-a\geq 0$

$-3a^2+2a+1\geq 0$

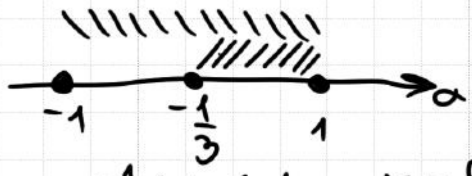
$3a^2-2a-1\leq 0$



② $-\frac{1}{2}\leq\frac{a}{2}\leq\frac{1}{2}$

$-1\leq a\leq 1$

Найдём пересечение ① и ②



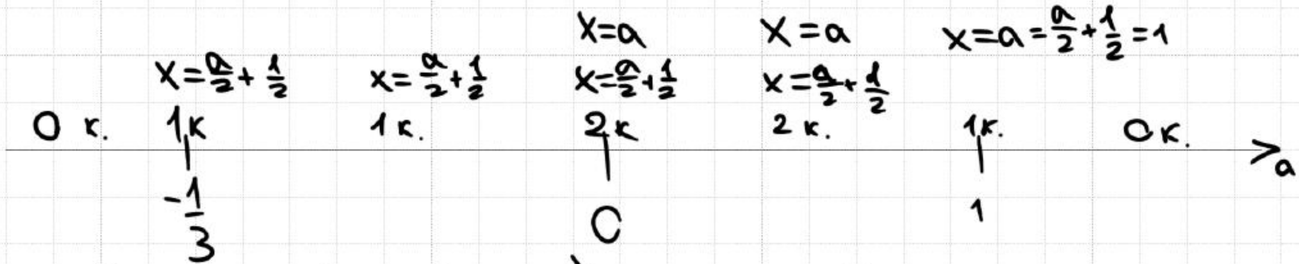
При $-\frac{1}{3}\leq a\leq 1$ $x=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}$ явл.

$x=a$ совпадает с $x=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}$, если

$a=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}$

$\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$

при $a=1$ корни совпадают



Ответ: $\left[-\frac{1}{3};0\right)\cup\{1\}$.

19 Дан набор цифр: 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9. Из них составляют одно трёхзначное и одно четырёхзначное число. Оба составленных числа кратны 45, цифры не повторяются.

а) Может ли сумма этих чисел быть равной 2205?
б) Может ли сумма этих чисел быть равной 3435?
в) Какова максимально возможная сумма этих чисел?

0 1 2 3 5 7 9

Чтобы число было кратно 45, оно должно оканч. на 0 или 5 и сумма цифр д.б. кратна 9

а) 1 случай
270 + 1395
или
720 1935

Получаем 270 + 1935 = 2205
Ответ: а) да

б) 1 случай
270 1395
или
720 1935
3195
3915
9135
9315

Любая из 12 рассмотренных сумм не равна 3435

315 2 случай
или 2790
135 2970
7290
7920
9720
9270

Любая из 12 рассмотренных сумм не равна 3435
Значит это невозможно
Ответ: б) нет

2 способ

б) сумма двух чисел, кратных 45, также кратна 45,
значит 3435 д.б. кратно 45, а оно не кратно
Ответ: б) нет.

19 Дан набор цифр: 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9. Из них составляют одно трёхзначное и одно четырёхзначное число. Оба составленных числа кратны 45, цифры не повторяются.

а) Может ли сумма этих чисел быть равной 2205?
б) Может ли сумма этих чисел быть равной 3435?
в) Какова максимально возможная сумма этих чисел?

б)
2 7

в) Если трёхзначное оканч. на 0, а четыр. на 5, то наибольшие слагаемые это 720 и 9315 (см. п.б)

Если тр. оканч. на 5, а чет. на 0, то наиб. слаг. это 315 и 9720

В обоих случаях сумма 10035
Большая сумма невозможна, т.к. мы брали наиб. возм. слаг.
в) 10035.