1

В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 15$, AH — высота, $BH = 6$.

Найдите косинус угла BAC. $= \cos ABH = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

C18485

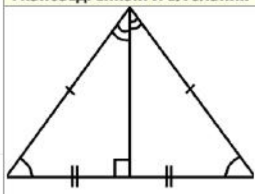
ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2013

КОСИНУС

$\cos\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

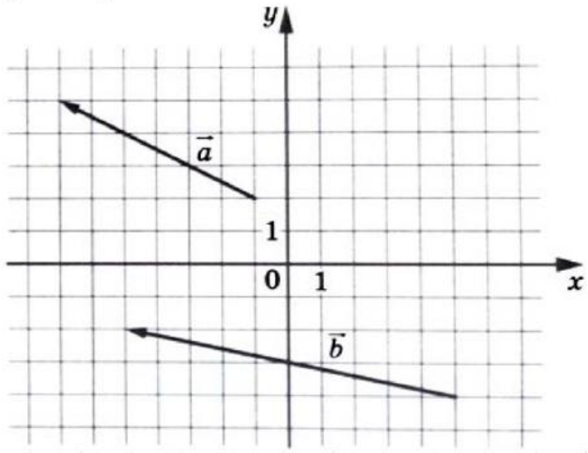


Биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию, равны

ОТВЕТ 0,4

2

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



$\vec{a}(-6;3)$

$\vec{b}(-10;2)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 60+6 = 66$

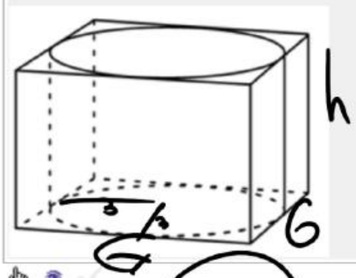
ИСТОЧНИКИ

Ященко (36 вариантов) 2024

ОТВЕТ 66

3

Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 3. Объём параллелепипеда равен 36. Найдите высоту цилиндра.



A57713

$V_{пр} = 36 = 6 \cdot 6 \cdot h$

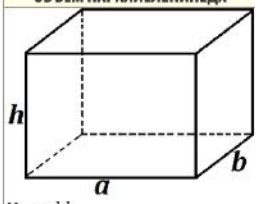
$h = 1$

ОТВЕТ 1

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)

ОБЪЁМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА



$V = abh$

4

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

40200e

ОО
ОР
РО
РР

$P = \frac{2}{4} = 0{,}5$

ОТВЕТ 0,5

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2013
Досрочная волна 2023

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$p = \frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$

5 Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,2.

P(выиграть) = 0,2
P(проиграть) = 0,2
P(ничьи) = 0,6
} 1

6 очков
ВВ $0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$

4 очка
ВН $0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$

4 очка
НВ $0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12$

} 0,28

ОТВЕТ 0,28

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ

Независимые события – это события, когда вероятность наступления второго события не зависит от уже наступившего первого события

ПРИМЕР:

Событие A — в кофе-автомате из Москвы закончится кофе
Событие B — в кофе-автомате из Читы закончится кофе

Если в московском кофе-автомате закончится кофе, то это никак не повлияет на кофе-автомат в Чите, а если бы кофе-автоматы стояли рядом, то повлияло бы и события бы были зависимые

Вероятность совместного наступления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

НЕСОВМЕСТНЫЕ СОБЫТИЯ

Несовместные события – это события, которые не могут наступить одновременно

ПРИМЕР:

Событие A — на кубике выпало чётное число очков
Событие B — на кубике выпало нечётное число очков

Нельзя бросить кубик так, чтобы оба события наступили одновременно

Вероятность наступления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$P(A + B) = P(A) + P(B)$

6 Найдите корень уравнения $\frac{2}{7}x = -5\frac{1}{7}$.

4A45B0

$$\frac{2}{7} \cdot x = -\frac{36}{7}$$

$$x = -18$$

ОТВЕТ −18

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)

7 Найдите значение выражения $30\,\mathrm{tg}\,3^\circ \cdot \mathrm{tg}\,87^\circ - 43$.

70CAFA

$30 \cdot \mathrm{tg}3 \cdot \mathrm{tg}(\underset{\frac{\pi}{2}}{90}-3) - 43$

$30 \cdot \mathrm{tg}3 \cdot \mathrm{ctg}3 - 43$

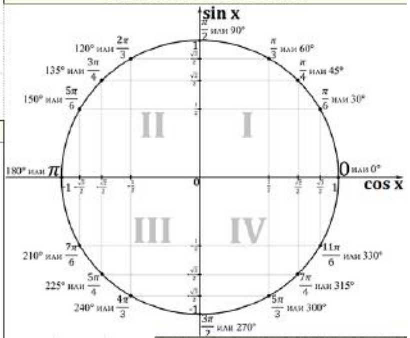
$30 \cdot 1 - 43 = -13$

ОТВЕТ −13

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2013

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ



ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

1 ШАГ

Если в скобочке нечётное количество $\frac{\pi}{2}$, то функция меняется на кофункцию

Если в скобочке сколько-то π, то функция остаётся прежней

ПРИМЕР:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$

$\mathrm{tg}(\pi+\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

2 ШАГ

Определяем знак по указанной в скобочках четверти (смотреть на изначальную функцию, а не на изменившуюся)

ПРИМЕР:

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$

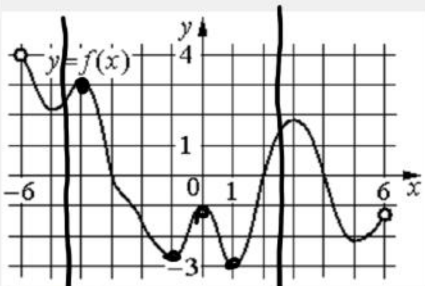
Это IV четверть, в ней синус имеет знак минус, поэтому

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

1	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2	$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
3	$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$
4	$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6\,;\,6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-4{,}5\,;\,2{,}5]$.

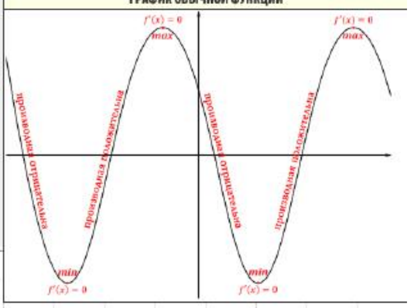


ОТВЕТ 4

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2018

ГРАФИК ОБЫЧНОЙ ФУНКЦИИ



9

При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 170$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 12$ м/с и $v = 6$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 180 Гц?

9685F7

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2019
Основная волна 2017
Основная волна 2013

$$f \geq 180$$

$$f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v} \geq 180$$

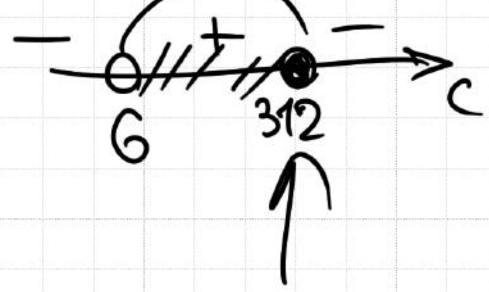
$$17\cancel{0} \cdot \frac{c+12}{c-6} \geq 18\cancel{0} \quad \Big| : 17$$

$$\frac{c+12}{c-6} \geq \frac{18}{17}$$

$$\frac{c+12}{c-6} - \frac{18}{17} \geq 0$$

$$\frac{17c + 17\cdot 12 - 18c + 18\cdot 6}{17\cdot(c-6)} \geq 0$$

$$\frac{312-c}{17\cdot(c-6)} \geq 0$$



ОТВЕТ 312

10

Первая труба наполняет резервуар на 13 минут дольше, чем вторая.
Обе трубы, работая одновременно, наполняют этот же резервуар за 42 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

4E4109

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2021
Основная волна 2017
Досрочная волна 2016

	Пр-ть	Время	Кол-во рез-ров
I	$\frac{1}{x+13}$ р/мин	$x+13$	1
II	$\frac{1}{x}$ р/мин	x	1
Вместе	$\frac{1}{42}$ р/мин	42	1

$$\frac{1}{x+13}^{(x} + \frac{1}{x}^{(x+13} = \frac{1}{42}$$

$$\frac{x + x + 13}{x^2+13x} = \frac{1}{42}$$

$$\frac{2x+13}{x^2+13x} = \frac{1}{42}$$

$$x^2 + 13x = 84x + 42\cdot 13$$

$$x^2 - 71x - 546 = 0$$

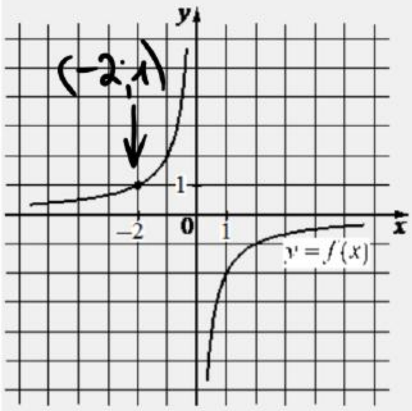
$$D = 5041 + 4\cdot 546 = 5041 + 2184 = 7225 = 85^2$$

$$x = \frac{71+85}{2} = 78$$

ОТВЕТ 78

11

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



$1 = \frac{k}{-2}$ $\quad k = -2$

$f(x) = \frac{-2}{x}$

$f(10) = \frac{-2}{10} = -0{,}2$

D6A2A2

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2023

ОТВЕТ −0,2

12

Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 6x - 5$$

на отрезке $[9; 36]$.

2F96EF

① $y = \frac{2}{3} \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6x - 5$

$y = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 6x - 5$

② $y' = \cancel{\frac{2}{3}} \cdot \cancel{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6 = 0$

$\sqrt{x} = 6$

$x = 36$

③ $y(9) = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 3 - 54 - 5 = -41$

$y(36) = \frac{2}{3} \cdot 36 \cdot 6 - 216 - 5 = -77$

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2023
Досрочная волна 2022

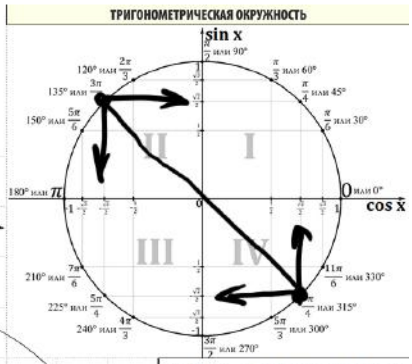
ПРОИЗВОДНЫЕ	
1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

ОТВЕТ −77

13 а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + \left(1+\sqrt{3}\right)\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.



ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2014

а) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

$\operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x + 1) + \sqrt{3}\cdot(\operatorname{tg} x + 1) = 0$

$(\operatorname{tg} x + 1)\cdot(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$

$\operatorname{tg} x + 1 = 0$

$\operatorname{tg} x = -1$

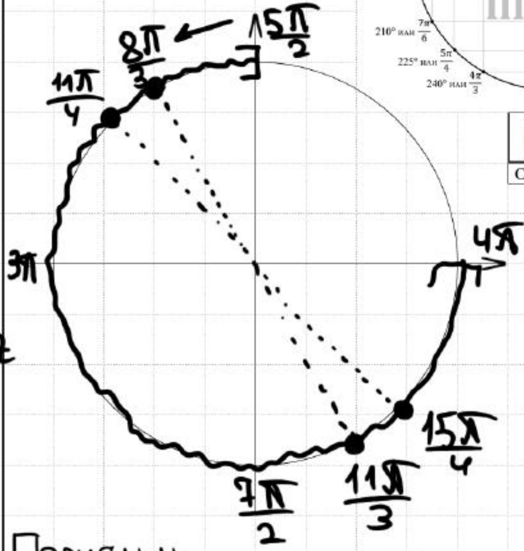
$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности



Получим

$x = \frac{3\pi}{1} - \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$

$x = \frac{4\pi}{1} - \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$

$x = \frac{3\pi}{1} - \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$

$x = \frac{4\pi}{1} - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}$

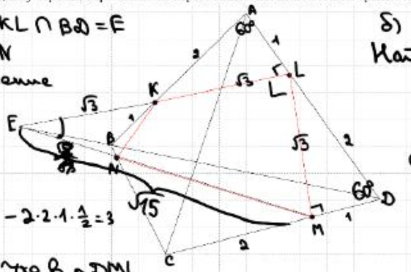
Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, -\frac{\pi}{3} + \pi n; n \in Z$

б) $\frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}; \frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$

14 В тетраэдре $ABCD$ грани ABD и ACD являются правильными треугольниками со стороной равной 3 и перпендикулярны друг другу. На рёбрах AB, AD, CD отмечены точки K, L и M соответственно, причём $BK = AL = DM = 1$.

а) Докажите, что плоскость MLK перпендикулярна CD.
б) Найдите длину отрезка, образованного пересечением плоскости MLK с гранью ABC.

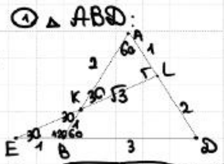
а) ① Пусть $KL \cap BD = E$
$EM \cap BC = N$
$NKLM$ - сечение



б) KN - ?
Найдём EK
EN
$\cos \angle KEN = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

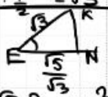
② $\triangle DML$:
по т. cos:
$LM^2 = 2^2 + 1^2 - 2\cdot 2\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 3$
$LM = \sqrt{3}$
Заметим, что в $\triangle DML$
вып. т. Пиф. $2^2 = \sqrt{3}^2 + 1^2$
$\Rightarrow \angle LMD = 90^\circ$ по т. обр. т. Пиф

① $\triangle ABD$:



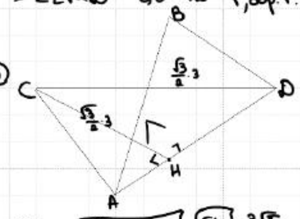
$EK = \sqrt{1 + 1 + 2\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$\triangle EKN$:



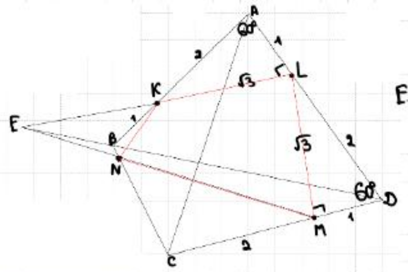
$KN^2 = 3 + \frac{5}{3} - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{3}$
$KN = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

③

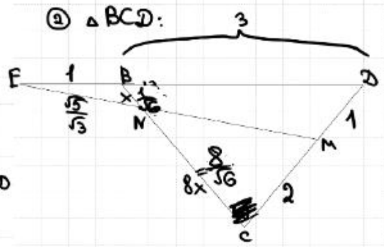


$BH \perp AD$
$KL \perp AD$
$BH \parallel KL$
$BH \perp CD$ (т.к. $BH \perp (ACD)$)
$KL \perp CD$
$\boxed{CD \perp KL}$
$\boxed{CD \perp LM}$ $\Rightarrow CD \perp (KLM)$

$BC = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{54}{4}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

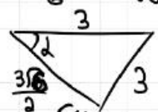


② $\triangle BCD$:



$\frac{DM}{CM}\cdot\frac{CN}{BN}\cdot\frac{BE}{DE} = 1$
$\frac{1}{2}\cdot\frac{CN}{BN}\cdot\frac{1}{4} = 1$
$\frac{CN}{BN} = 8$
$9x = \frac{3\sqrt{6}}{2}$
$x = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

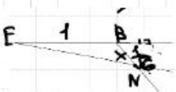
$\triangle BCD$:



$\cos\alpha = \frac{3^2 + \frac{54}{4} - 3^2}{2\cdot 3\cdot \frac{3\sqrt{6}}{2}}$ ~~$= \frac{2\sqrt{3}}{...} \frac{\sqrt{3}}{4}$~~ $= \frac{54}{4\cdot 9\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}}$

~~$\cos\angle EBN = \frac{\sqrt{3}}{4}$~~

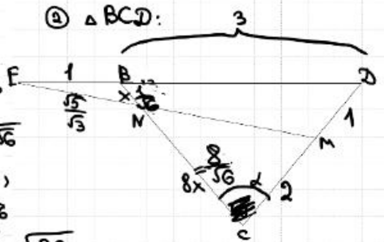
$\cos\angle EBN = -\frac{3}{2\sqrt{6}}$



$EN = \sqrt{1 + \frac{1}{6} + 2\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{3}{2\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

$\triangle BCD$:
по т. cos:
$\cos\alpha = \frac{3^2 + \frac{54}{4} - 3^2}{2\cdot\frac{3\sqrt{6}}{2}\cdot 3} = \frac{54\cdot 6}{4\cdot 8\sqrt{6}}$
$= \frac{3}{2\sqrt{6}}$

② $\triangle BCD$:



$\triangle CNM$:
$NM = \sqrt{\frac{64}{6} + 4 - 2\cdot\frac{8}{\sqrt{6}}\cdot 2\cdot\frac{3}{2\sqrt{6}}}$
$= \sqrt{\frac{40}{6}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{3}}$

$\frac{8}{\sqrt{6}}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{8} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

$EM = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \sqrt{15}$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

15 Решите неравенство

$$\log_{0,2}(x^3-2x^2-4x+8) \le \log_{0,04}(x-2)^4.$$

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2023

	СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ
1	$\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$
2	$\log_a b-\log_a c=log_a\frac{b}{c}$
3	$\log_a b^m=m\cdot\log_a b$
4	$\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\cdot\log_a b$
5	$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$
6	$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

	ФСУ
1	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
2	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
4	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
5	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
6	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
7	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$\log_{0,2}\left(x^2(x-2)-4(x-2)\right) \le \log_{0,2^2}(x-2)^4$$

$$\log_{0,2}\left((x-2)(x^2-4)\right) \le \log_{0,2}(x-2)^2$$

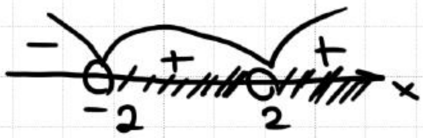
$$\log_{0,2}\left((x-2)^2(x+2)\right) \le \log_{0,2}(x-2)^2$$

$$\begin{cases} (x-2)^2>0 & (1)\\ (x-2)^2(x+2)>0 & (2)\\ (x-2)^2(x+2)\geq(x-2)^2 & (3)\end{cases}$$

(1) $(x-2)^2>0$

$x\neq 2$

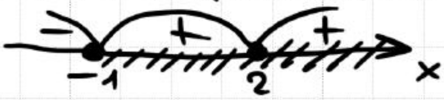
(2)



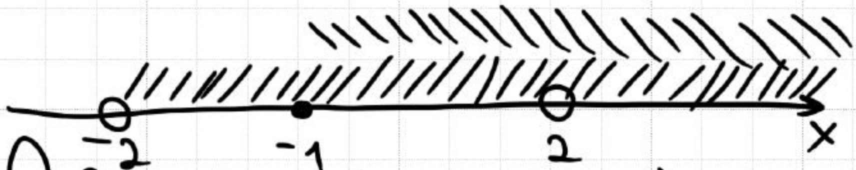
(3) $(x-2)^2(x+2)-(x-2)^2\geq 0$

$(x-2)^2\cdot(x+2-1)\geq 0$

$(x-2)^2\cdot(x+1)\geq 0$



Найдём пересечение:



Ответ: $[-1;2)\cup(2;+\infty)$.

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 900 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

$\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)$

– каждый январь долг будет возрастать на r% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– в конце 2030 года долг составит 200 тыс. руб;
– в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1270 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж в 2035 году?

март – месяц платежа
x – величина уменьш. долга первые 5 лет
y – величина уменьш. долга след. 5 лет

$\left(1+\frac{r}{100}\right)=b$

Дата	Сумма долга		
и 25	900		
я 26	$900b$		
м 26		$\Rightarrow$ была выплата	$900b-760$
и 26	$900-x=760$		
я 27	$760b$		
м 27		$\Rightarrow$ б.в.	$760b-620$
и 27	$900-2x=620$		
я 28	$620b$		
м 28		$\Rightarrow$ б.в.	$620b-480$
и 28	$900-3x=480$		
я 29	$480b$		
м 29		$\Rightarrow$ б.в.	$480b-340$
и 29	$900-4x=340$		
я 30	$340b$		
м 30		$\Rightarrow$ б.в.	$340b-200$
и 30	$900-5x=200$		$\boxed{x=140}$
я 31	$200b$		
м 31		$\Rightarrow$ б.в.	$200b-160$
и 31	$200-y=160$		
я 32	$160b$		
м 32		$\Rightarrow$ б.в.	$160b-120$
и 32	$200-2y=120$		
я 33	$120b$		
м 33		$\Rightarrow$ б.в.	$120b-80$
и 33	$200-3y=80$		
я 34	$80b$		
м 34		$\Rightarrow$ б.в.	$80b-40$
и 34	$200-4y=40$		
я 35	$40b$		
м 35		$\Rightarrow$ б.в.	$\boxed{40b}$
и 35	$200-5y=0$		$\boxed{y=40\text{ тыс.}}$

Первые 5 и последние 5 выплат образ. арифм. прогр.
Воспользуемся ф-лой $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

О.С.В. $=1270$

$$\frac{900b-760+340b-200}{2}\cdot 5+\frac{200b-160+40b}{2}\cdot 5=1270$$

$$(620\cdot b-480)\cdot 5+(120b-80)\cdot 5=1270$$

$$3100\cdot b-2400+600b-400=1270$$

$$3700\cdot b=4070$$

$$b=1{,}1$$

$$1+\frac{r}{100}=1{,}1$$

$$r=10\%$$

Платёж в 2035 г.:

$$40\cdot b=40\cdot 1{,}1=44\text{ тыс.}$$

Ответ: 44 тыс.

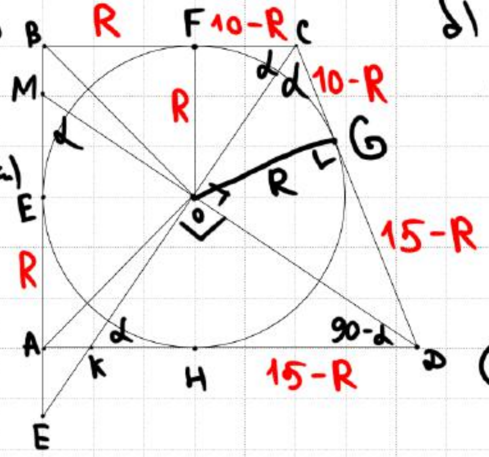
17 В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A и острым углом при вершине D вписана окружность с центром O. Прямая DO пересекает сторону AB в точке M, а прямая CO пересекает сторону AD в точке K.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна 2017

а) Докажите, что $\angle AMO = \angle DKO$.
б) Найдите площадь треугольника AOM, если $BC = 10$ и $AD = 15$.

а) ① CO – бис., DO – бис. (по св-ву отрезков кас. пров. из одной точки)

$\angle COD = 90^\circ$
(т.к. биссектрисы односторонних углов при парал. прямых пересек. под 90°)



② $\angle DOK = 90^\circ = \angle COD$
Пусть $\angle AMO = \alpha$
Тогда $\angle ODK = 180 - \angle MAD - \angle AMO = 90 - \alpha$
$\angle DKO = 180 - \angle ODK - DOK = \alpha = \angle AMO$ ■

б) ① $\triangle AOM = \triangle BOC$ по УСУ
$\left(\begin{array}{l} BO = AO \\ \angle MAO = 45^\circ = \angle CBO \\ \angle AOM = 135 - \alpha = \angle BOC \end{array} \right)$
Найдём S_{BOC}

② $\triangle COD$ – прямоуг.
$R^2 = (10 - R)(15 - R)$
$\cancel{R^2} = 150 - 25R + \cancel{R^2}$
$R = 6$
$S_{BOC} = S_{AOM} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30$
Ответ: б) 30

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^4+(a-5)^4}=|x+a-5|+|x-a+5|$$

имеет единственное решение.

ИСТОЧНИКИ
ФИПИ (новый банк)
Ященко 2018
Ященко 2018
Семёнов 2015
Досрочная волна 2014

$\sqrt{x^4+(a-5)^4}-|x+a-5|-|x-a+5|=0$

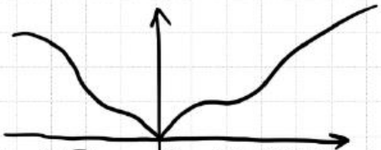
$f(x)=\sqrt{x^4+(a-5)^4}-|x+a-5|-|x-a+5|$

$f(-x)=\sqrt{(-x)^4+(a-5)^4}-|-x+a-5|-|-x-a+5|=$

$=\sqrt{x^4+(a-5)^4}-|x-a+5|-|x+a-5|$

$\Rightarrow f(-x)=f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ - чётная функция



Единственный корень чётная ф-ция может иметь, только, если этот корень $x=0$

ПРИ $x=0$

$\sqrt{(a-5)^4}=|a-5|+|-a+5|$

$(a-5)^2=|a-5|+|a-5|$

$(a-5)^2=2|a-5|$

$|a-5|^2-2|a-5|=0$

$|a-5|\cdot(|a-5|-2)=0$

$a=5$ $\quad |a-5|=2$

$a=3$

$a=7$

Если $\boxed{a=3}$, то

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^4+(a-5)^4}=|x+a-5|+|x-a+5|$$

имеет единственное решение.

$\sqrt{x^4+16}=|x-2|+|x+2|$

$\|x-2\|$	$-$	$-$	$+$
$\|x+2\|$	$-$	$+$	$+$

$-2 \qquad 2 \qquad x$

Если $x<-2$, то $\sqrt{x^4+16}=2-x-x-2$

$\sqrt{x^4+16}=-2x$

$\begin{cases}-2x\geq 0\\ x^4+16=4x^2\end{cases}$

$\begin{cases}x\leq 0\\ x^4-4x^2+16=0\end{cases}$

$\begin{cases}x\leq 0\\ (x^4-4x^2+4)+12=0\end{cases}$

нет решения

Если $-2\leq x\leq 2$, то

$\sqrt{x^4+16}=2-x+x+2$

$\sqrt{x^4+16}=4$

$x^4+16=16$

$x=0$ — единственное решение

Если $x>2$, то $\sqrt{x^4+16}=x-2+x+2$

$\sqrt{x^4+16}=2x$

нет решений

Если $a=5$, то

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^4+(a-5)^4}=|x+a-5|+|x-a+5|$$

имеет единственное решение.

$\sqrt{x^4}=|x|+|x|$

$x^2=2|x|$

$|x|^2-2|x|=0$

$|x|\cdot(|x|-2)=0$

$x=0 \qquad x=\pm 2$

Три реш

Если $\boxed{a=7}$, то $\sqrt{x^4+16}=|x+2|+|x-2|$

$x=0$ - единств. реш

Ответ: 3; 7.

19 Саша берёт пять различных натуральных чисел и проделывает с ними следующие операции: сначала вычисляет среднее арифметическое первых двух чисел, затем среднее арифметическое результата и третьего числа, потом среднее арифметическое полученного результата и четвёртого числа, потом среднее арифметическое полученного результата и пятого числа – число A.

а) Может ли число A равняться среднему арифметическому начальных пяти чисел?
б) Может ли число A быть больше среднего арифметического начальных чисел в пять раз?
в) В какое наибольшее целое число раз число A может быть больше среднего арифметического начальных пяти чисел?

Пусть a b c d e – начальные числа

① Ср.ар. первых двух $= \frac{a+b}{2}$

② Ср.ар. рез-та и тр. числа $= \frac{\frac{a+b}{2}+c}{2} = \frac{a+b}{4}+\frac{c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}$

③ Ср.ар. рез-та и 4 числа $= \frac{\frac{a+b+2c}{4}+d}{2} = \frac{a+b+2c}{8}+\frac{d}{2} = \frac{a+b+2c+4d}{8}$

④ Ср.ар. рез-та и 5 числа $= \frac{\frac{a+b+2c+4d}{8}+e}{2} = \frac{a+b+2c+4d}{16}+\frac{e}{2} = \frac{a+b+2c+4d+8e}{16} = A$

а) Может ли число A равняться среднему арифметическому начальных пяти чисел?

$$\frac{a}{16}+\frac{b}{16}+\frac{c}{8}+\frac{d}{4}+\frac{e}{2} = \frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{c}{5}+\frac{d}{5}+\frac{e}{5} \quad \Big|\cdot 80$$

$$5a+5b+10c+20d+40e = 16a+16b+16c+16d+16e$$

$$4d+24e = 11a+11b+6c$$

Пусть $a=1$
$b=3$
$c=4$
$d=5$
$e=2$

Ответ: а) да, например если взять 1; 3; 4; 5; 2.

б) Может ли число A быть больше среднего арифметического начальных чисел в пять раз?

$$\frac{a}{16}+\frac{b}{16}+\frac{c}{8}+\frac{d}{4}+\frac{e}{2} = 5\cdot\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{c}{5}+\frac{d}{5}+\frac{e}{5}\right) \quad \Big|\cdot 16$$

$$a+b+2c+4d+8e = 16a+16b+16c+16d+16e$$

$$0 = 15a+15b+14c+12d+8e$$

Это уравнение не имеет реш. в нат. числах, т.к. правая часть ур-я полож. при любых натур. a, b, c, d, e

Ответ: б) нет.

в) В какое наибольшее целое число раз число A может быть больше среднего арифметического начальных пяти чисел?

$$\frac{a}{16}+\frac{b}{16}+\frac{c}{8}+\frac{d}{4}+\frac{e}{2} = k\cdot\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{c}{5}+\frac{d}{5}+\frac{e}{5}\right) \quad \Big|\cdot 80$$

$$5a+5b+10c+20d+40e = 16a\cdot k+16\cdot b\cdot k+16ck+16dk+16ek$$

$$a\cdot(16k-5)+b\cdot(16k-5)+c\cdot(16k-10)+d\cdot(16k-20)+e\cdot(16k-40)=0$$

Если $k\geq 3$, то левая часть ур-я >0

$\Rightarrow k\leq 2$

Покажем, что $k=2$ могло быть:

$$27\cdot a+27\cdot b+22\cdot c+12d = 8\cdot e$$

Пусть $a=1$
$b=3$
$c=2$
$d=4$
$e=25$

$$108+22\cdot c+12d = 8\cdot e$$

Ответ: в) 2, например для 1; 3; 2; 4; 25