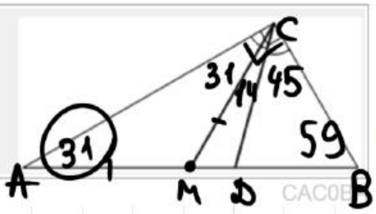
1

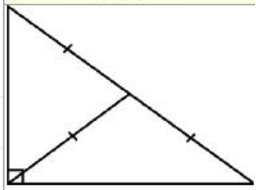
Угол между биссектрисой и медианой прямоугольного треугольника, проведёнными из вершины прямого угла, равен 14°. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.



ИСТОЧНИКИ

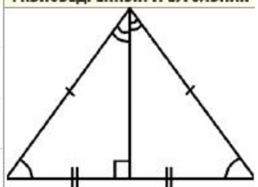
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2014

МЕДИАНА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



Биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию, равны

ОТВЕТ 3 1

2

Даны векторы $\vec{a}\,(3;7)$, $\vec{b}\,(8;9)$. Найдите длину вектора $1{,}2\vec{a}-0{,}7\vec{b}$.

ИСТОЧНИКИ

Ященко (36 вариантов) 2024

$1{,}2\vec{a}\,(3{,}6\,;\,8{,}4)$
$-0{,}7\vec{b}\,(-5{,}6\,;\,-6{,}3)$

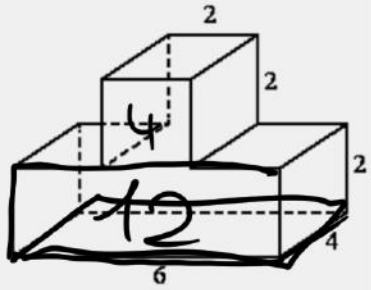
$1{,}2\vec{a}-0{,}7\vec{b}\,(-2\,;\,2{,}1)$

$|1{,}2\vec{a}-0{,}7\vec{b}| = \sqrt{4+4{,}41} = \sqrt{8{,}41} = 2{,}9$

ОТВЕТ 2 , 9

3

Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы – прямые).

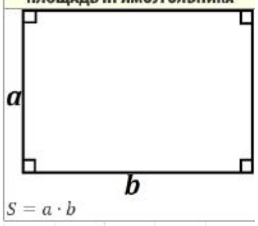


0CD226

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА



$S = a \cdot b$

$$S_{пов.} = \underset{пол}{6 \cdot 4} + \underset{потолок}{24} + \underset{справа}{16} + \underset{слева}{16} + \underset{ближн}{16} + \underset{сзади}{16} = 112$$

ОТВЕТ 112

4

В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

4c1895

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2021
Основная волна 2020
Основная волна 2018
Основная волна 2017

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$p = \frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$

$$p = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

ОТВЕТ 0,75

5 В коробке 12 синих, 6 красных и 7 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

0F9157

P(выбран один синий и один красный)

Сначала синий
Потом красный

$$\frac{\cancel{12}}{25} \cdot \frac{6}{\cancel{24}_2} = 0,12$$

+

Сначала красный
потом синий

$$\frac{\cancel{6}\,3}{25} \cdot \frac{\cancel{12}}{\cancel{24}_2} = 0,12$$

0,24

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2023

НЕСОВМЕСТНЫЕ СОБЫТИЯ

Несовместные события – это события, которые не могут наступить одновременно

ПРИМЕР:

Событие A — на кубике выпало чётное число очков

Событие B — на кубике выпало нечётное число очков

Нельзя бросить кубик так, чтобы оба события наступили одновременно

Вероятность наступления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$P(A+B) = P(A) + P(B)$

ОТВЕТ 0,24

6 Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+31} = 9$.

182653

$2x + 31 = 81$

$2x = 50$

$x = 25$

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2023
Демо 2022
Демо 2021
Демо 2020
Досрочная волна 2023
Основная волна 2022
Досрочная волна 2019
Основная волна 2018
Основная волна 2017
Основная волна 2014
Досрочная волна 2013

ОТВЕТ 25

7 Найдите значение выражения $\log_2 7 \cdot \log_7 4$.

C63976

$$\log_2 7 \cdot \log_7 2^2 = 2 \cdot \cancel{\log_2 7} \cdot \frac{1}{\cancel{\log_2 7}}$$

ИСТОЧНИКИ

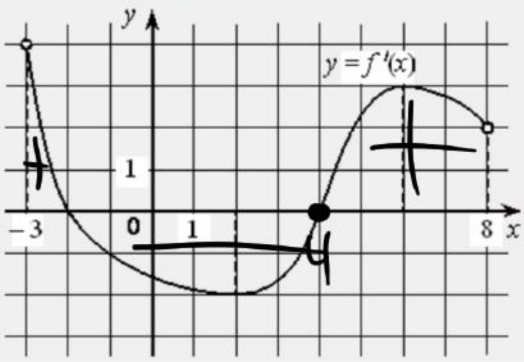
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2014

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

1	$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$
2	$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$
3	$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$
4	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$
5	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
6	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

ОТВЕТ 2

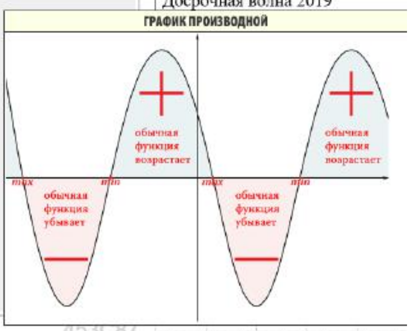
8 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



453C87

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2022
Досрочная волна 2019



ОТВЕТ 4

9

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения P (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P=\sigma ST^4$, где $\sigma=5{,}7\cdot10^{-8}$ — постоянная, площадь поверхности S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S=\frac{1}{18}\cdot10^{21}$ м ^{2}, а излучаемая ею мощность P равна $4{,}104\cdot10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Дайте ответ в градусах Кельвина.

C24CBD

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2019
Основная волна (Резерв) 2017
Досрочная волна 2014

$$T^4=\frac{P}{\sigma\cdot S}=\frac{\cancel{4104}^{\,216}\cdot10^{27}\cdot10\cdot\cancel{18}^{\,6}}{1000\cdot\cancel{57}_{\,\cancel{19}}\cdot10^{-8}\cdot1\cdot10^{21}}=1296\cdot10^{12}$$

$$4104\,|\,19 = 216$$

$$T^4=6^4\cdot10^{12}\quad\Big|^{\wedge\frac{1}{4}}$$

$$T=6\cdot10^3=6000$$

ОТВЕТ 6000

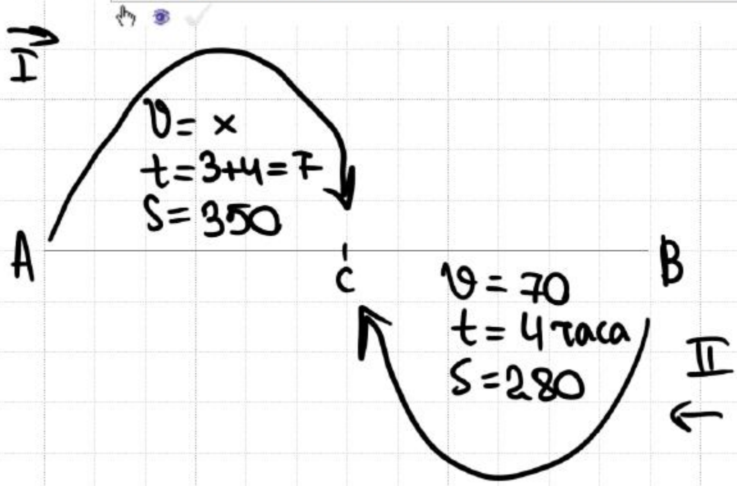
10

Расстояние между городами A и B равно 630 км. Из города A в город B выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему
из города B выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 350 км от города A. Ответ дайте в км/ч.

305DDD

ИСТОЧНИКИ

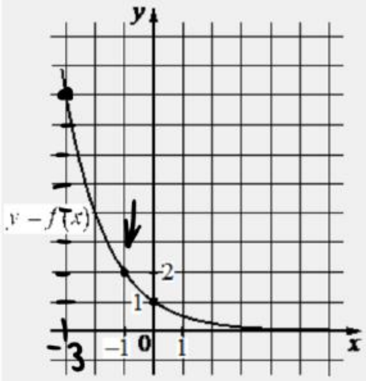
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2023
Основная волна 2019



$$x=\frac{350}{7}=50$$

ОТВЕТ 50

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-3)$.



① $(-1; 2)$

$2 = a^{-1}$

$2 = \frac{1}{a}$

$a = \frac{1}{2}$

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

783DBA

② $f(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2022

ОТВЕТ 8

12 Найдите наибольшее значение функции
$y = (x - 27) \cdot e^{28-x}$ на отрезке $[23; 40]$.

① $y' = 1 \cdot e^{28-x} - (x-27) \cdot e^{28-x} = 0$

$e^{28-x} \cdot (1 - (x-27)) = 0$

$e^{28-x} = 0$ — нет реш.

$1 - x + 27 = 0$

$28 = x$

② $y(28) = 1 \cdot e^0 = 1$

$y(23) = \ldots$

$y(40) = \ldots$

ИСТОЧНИКИ

FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2014

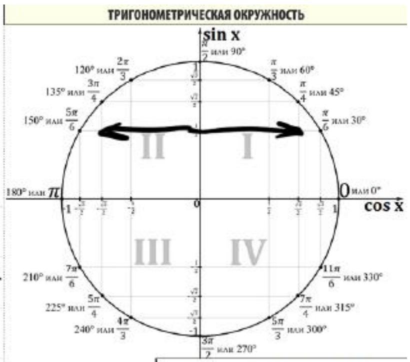
	ПРОИЗВОДНЫЕ
1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

ОТВЕТ 1

13 а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.



а) $2\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1-2\sin^2 x=\sqrt{3}\cos x+1$

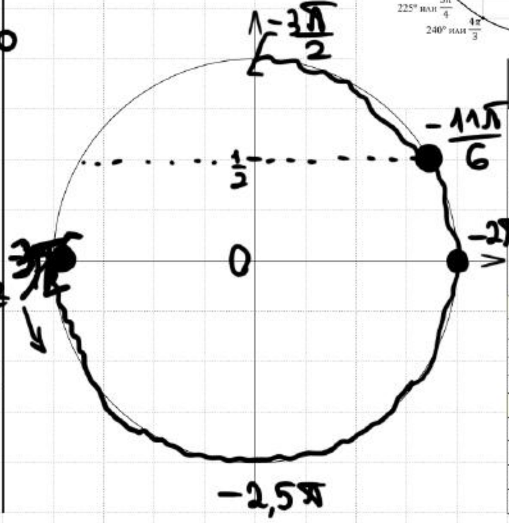
$\sin x+\cancel{\sqrt{3}\cos x}\cancel{+1}-2\sin^2 x-\cancel{\sqrt{3}\cos x}\cancel{-1}=0$

$\sin x\cdot(1-2\sin x)=0$

$\sin x=0$
$x=\pi n, n\in Z$

$\sin x=\frac{1}{2}$
$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$
$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности



ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2023
Демо 2022
Демо 2021
Демо 2020
Демо 2019
Основная волна 2018

ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

1	$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
3	$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
4	$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

Получим
$x=-3\pi$
$x=-2\pi$
$x=-2\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{11\pi}{6}$

Ответ: а) πn, $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; $n\in Z$
б) -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Точка M — середина ребра AA_1.

а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C.

ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна (Резерв) 2018

Гордин #14 2019

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Расстояние между скрещивающимися прямыми – это длина общего перпендикуляра, проведённого к этим прямым

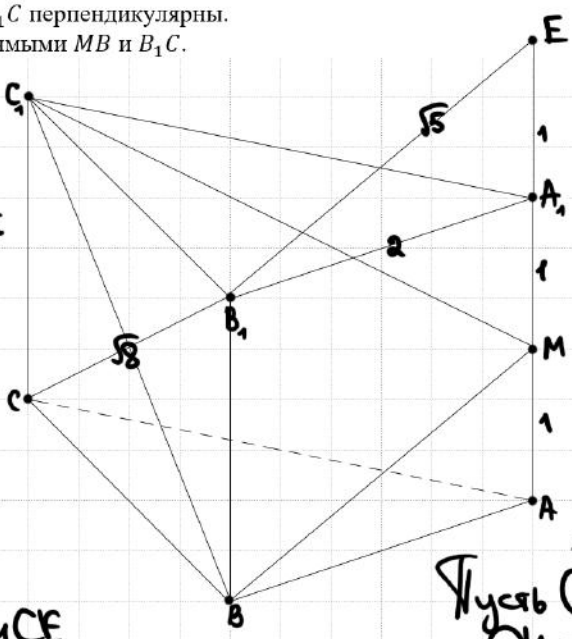
Если одна из двух скрещивающихся прямых лежит в плоскости, а другая – параллельна этой плоскости, то расстояние между данными прямыми равно расстоянию между прямой и плоскостью

Если две скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях, то расстояние между этими прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями

а) ① Построим A_1E такую, что $A_1E = 1 = A_1M$

тогда $B_1E \parallel BM$

тогда $\angle EB_1C$ — искомый



② Рассмотрим $\triangle EB_1C$:

$EB_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + A_1E^2} = \sqrt5$

$B_1C = \sqrt{BC^2 + BB_1^2} = \sqrt8$

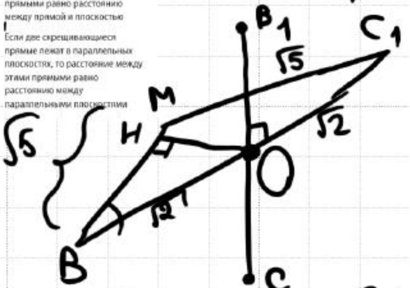
$CE = \sqrt{AC^2 + AE^2} = \sqrt{13}$

Заметим что в $\triangle B_1CE$ вып. т. Пиф $13 = 5 + 8$

$\Rightarrow \angle EB_1C = 90^\circ \Rightarrow MB \perp B_1C$

по т., обр. т. Пиф ■

б) ① Рассм. пл. BMC_1



$B_1C \perp BC_1$ (диаг. кв.)

$B_1C \perp MB$ (см. п.а)

$\Rightarrow B_1C \perp (BMC_1)$

Пусть OH — перпендикуляр к BM

OH — искомое расстояние

② $\triangle BMC_1$: по т. cos

$$\cos B = \frac{5 + 8 - 5}{2\sqrt5 \cdot 2\sqrt2} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt6}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt3}{\sqrt5} = \frac{OH}{\sqrt2}$$

$$OH = \frac{\sqrt6}{\sqrt5} = \sqrt{1{,}2}$$

Ответ: $\sqrt{1{,}2}$.

15 Решите неравенство $125^x - 25^x + \frac{4\cdot 25^x - 20}{5^x - 5} \le 4$.

132FCB

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016

ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ

$a^{\log_a b} = b$

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Пусть $5^x = t$

$$t^3 - t^2 + \frac{4t^2-20}{t-5} - \frac{4}{1} \le 0$$

$$\frac{t^4-5t^3-t^3+5t^2+4t^2-\cancel{20}-4t+\cancel{20}}{t-5} \le 0$$

$$\frac{t^4-6t^3+9t^2-4t}{t-5} \le 0$$

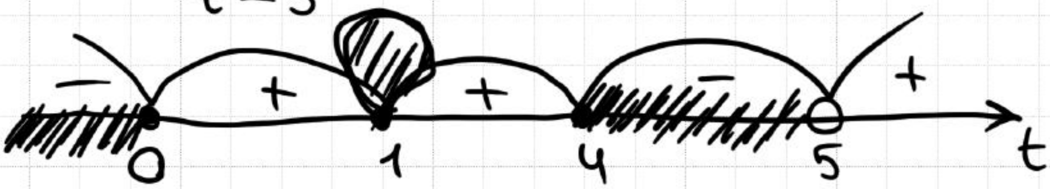
$$\frac{t\cdot(t^3-6t^2+9t-4)}{t-5} \le 0$$

Заметим, что при $t=1$ выр-е t^3-6t^2+9t-4 обр в ноль

$$\begin{array}{r|l} t^3-6t^2+9t-4 & t-1 \\ \hline -\;t^3-t^2 & t^2-5t+4 \\ -5t^2+9t & \\ -\;-5t^2+5t & \\ -4t-4 & \\ -\;-4t-4 & \\ 0 & \end{array}$$

Получаем

$$\frac{t\cdot(t-1)\cdot(t^2-5t+4)}{t-5} \le 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t\le 0 \\ t=1 \\ 4\le t<5 \end{array}\right.$$

$5^x \le 0$ нет реш.

$5^x = 1$
$x = 0$

$4 \le 5^x < 5$
$5^{\log_5 4} \le 5^x < 5^1$
$\log_5 4 \le x < 1$

Ответ: $\{0\} \cup [\log_5 4; 1)$

16 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на 10 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором банк через четыре года начислит на вклад меньше 15 млн рублей.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна (резерв) 2020
Ященко 2018
Досрочная волна 2016

Пусть S – сумма вклада
янв21 – месяц открытия вклада
дек – месяц начисл. %
янв – месяц пополнения вклада

Дата	Сумма вклада
Я21	S
Д21	$1{,}1\cdot S$
Я22	ничего не происходит
Д22	$1{,}1^2\cdot S$
Я23	$1{,}1^2\cdot S+10$
Д23	$1{,}1^3\cdot S+10\cdot 1{,}1$
Я24	$1{,}1^3\cdot S+10\cdot 1{,}1+10$
Д24	$1{,}1^4\cdot S+10\cdot 1{,}1^2+10\cdot 1{,}1$

$$\frac{11^4}{10^4}\cdot S+\frac{\cancel{10}\cdot 11^2}{\cancel{10^2}}+\frac{\cancel{10}\cdot 11}{\cancel{10}}-\frac{S}{1}^{(10000}-2\cdot 10<15$$

$$\frac{4641}{10^4}\cdot S<15+20-11-\frac{121}{10}$$

$$\frac{4641}{10^4}\cdot S<\frac{119}{10}\quad\Big|:\frac{4641}{10^4}$$

$$S<\frac{119\cdot \cancel{10^4}\,10^3}{\cancel{10}\cdot 4641}$$

$$S<25\frac{2975}{4641}$$

$$\begin{array}{r|l} 119000 & 4641 \\ \hline -9282 & 25 \\ 26180 & \\ -23205 & \\ 2975 & \end{array}$$

$S_{наиб.цел.}=25$ млн

Ответ: 25 млн

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. На боковой стороне AB и большем основании AD взяты соответственно точки F и E так, что FE параллельно CD, а $FC = ED$.

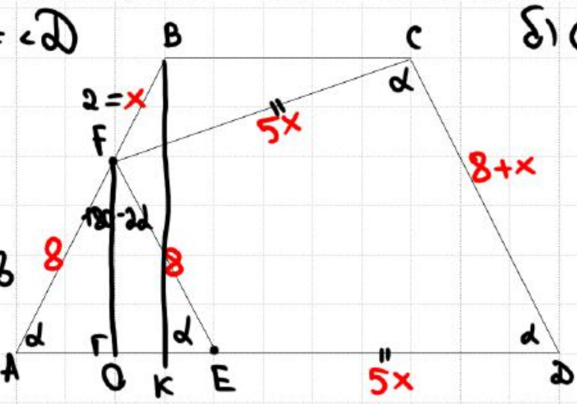
а) Докажите, что $\angle BCF = \angle AFE$.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $ED = 5BF$, $FE = 8$ и площадь трапеции $FCDE$ равна $27\sqrt{11}$.

а) ① Пусть $\angle A = \alpha = \angle D$ (т.к. р/б. трап.)

$\angle AEF = \alpha = \angle D$ (соотв.)

$\angle AFE = 180 - 2\alpha$ (т. о сумме углов тр.)



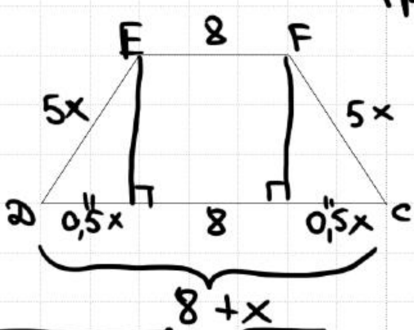
② CFED – р/б. трап.

$\angle FCD = \alpha = \angle D$

$\angle BCD = 180 - \alpha$ (т.к. $\angle BCD$ и $\angle D$ одност.)

$\angle BCF = 180 - \alpha - \alpha = 180 - 2\alpha = \angle AFE$ ■

б) ① Рассмотрим CDEF – р/б. трап.



$$h = \sqrt{25x^2 - \frac{1}{4}x^2} = \sqrt{\frac{99}{4}}\,x = \frac{3}{2}\sqrt{11}x$$

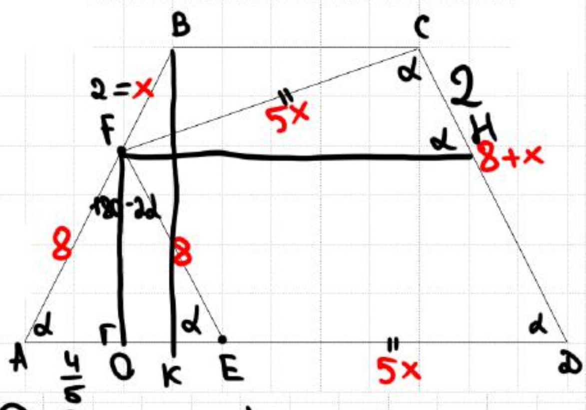
$$S_{FCDE} = \frac{8 + x + 8}{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{11} \cdot x = 27\sqrt{11}$$

$$\frac{(16+x)\cdot \cancel{3}}{4} \cdot x = \cancel{27}\ 9 \quad |\cdot 4$$

$$(16+x)\cdot x = 36$$

$$x^2 + 16x - 36 = 0$$

$\cancel{x = -18}$ пост. $\qquad x = 2$



② Построим FH такую, что FH ∥ ED

Тогда △FCH ~ △FAE по 2 углам

$$\frac{CH}{AE} = \frac{FC}{FE} \qquad \frac{2}{AE} = \frac{10}{8}$$

$$AE = 1,6 = \frac{8}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5\cdot 8} = \frac{1}{10}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{99}}{10} = \frac{3\sqrt{11}}{10} = \frac{FO}{8}$$

$$FO = \frac{24\sqrt{11}}{10}$$

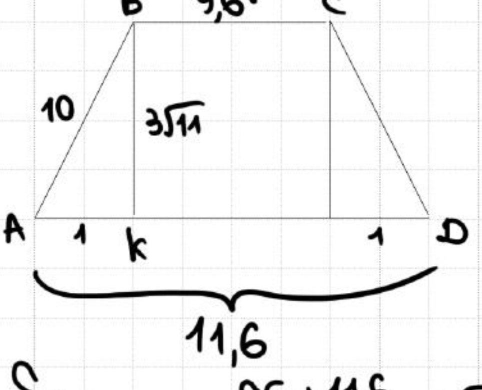
③ △AFO ~ △ABK по 2 углам

$$\frac{\cancel{10}}{8} = \frac{h\cdot\cancel{10}}{24\sqrt{11}}$$

$$8h = 24\sqrt{11}$$

$$h = 3\sqrt{11}$$

④ Рассмотрим ABCD:



$$S_{ABCD} = \frac{9,6 + 11,6}{2} \cdot 3\sqrt{11} = 31,8\sqrt{11}$$

Ответ: $31,8\sqrt{11}$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(4\cos x - 3 - a)\cdot \cos x - 2{,}5\cos 2x + 1{,}5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2013

6B042D

$4\cos^2 x - 3\cos x - a\cdot\cos x - 2{,}5\cdot(2\cos^2 x - 1) + 1{,}5 = 0$

$4\cos^2 x - 3\cos x - a\cdot\cos x - 5\cdot\cos^2 x + 4 = 0$

$-\cos^2 x - 3\cos x - a\cdot\cos x + 4 = 0$

$\cos^2 x + (3+a)\cdot\cos x - 4 = 0$

Пусть $\cos x = t$ $\quad -1 \le t \le 1$

$t^2 + (3+a)\cdot t - 4 = 0$

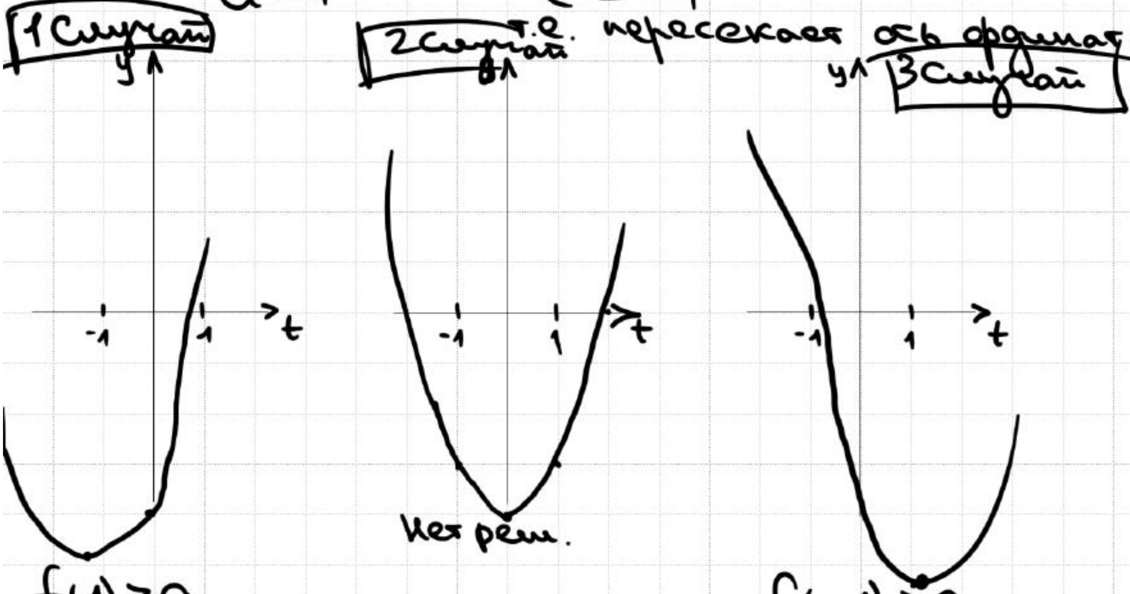
Найдём все a, при которых это ур-е имеет хотя бы один корень $t \in [-1; 1]$

Пусть $f(t) = t^2 + (3+a)\cdot t - 4$

График – парабола, ветви ↑

$a = 1$ $\quad c = -4$

т.е. пересекает ось ординат в $(0; -4)$



$f(1) \ge 0$ $\qquad\qquad f(-1) \ge 0$

$$\left[\begin{array}{l} f(-1) \ge 0 \quad (1) \\ f(1) \ge 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

(1) $(-1)^2 + (3+a)\cdot(-1) - 4 \ge 0$

$1 - 3 - a - 4 \ge 0$

$a \le -6$

(2) $1^2 + (3+a)\cdot 1 - 4 \ge 0$

$1 + 3 + a - 4 \ge 0$

$a \ge 0$

Ответ: $(-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$

На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?
б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на 6?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть на доске?

Источники:
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017

На доске могут быть числа:
2
6
12
16
22
26
32
36
...

Ответ:	а) нет
	б) нет
	в) 11

а) Может ли быть 15 чисел, оканчивающихся на 2? быть 15 чисел, оканчивающихся на 6?

В таком случае сумма 30-ти чисел оканчивалась бы на 0, а не на 4, как 2454.
Ответ: а) нет.

б) Могут ли 29 чисел оканчиваться на 2 и 1 число оканчиваться на 6?

Найдём минимально возможную сумму таких чисел:

$6 \quad \underbrace{2 \quad 12 \quad 22 \quad \dots \quad 282}_{29 \text{ чисел}}$

$S_{min} = \frac{2+282}{2} \cdot 29 + 6 = 4124$
$4124 > 2454$
Ответ: б) нет.

На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?
б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на 6?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть на доске?

в) ① Могут ли 25 чисел оканчиваться на 2 и 5 чисел на 6?

6 16 26 36 46 2 12 22 ... 242
$S \geqslant \frac{6+46}{2} \cdot 5 + \frac{2+242}{2} \cdot 25 = 130 + 3050$ $\qquad +56 - 242 = -186$
$S \geqslant 3180$

Если взять >25 чисел, оканч. на 2 и <5 чисел, ок. на 6, то $S > 3180$

Могут ли 24 ч. ок. на 2 и 6 ч. на 6?
$S \geqslant \frac{6+56}{2} \cdot 6 + \frac{2+232}{2} \cdot 24$
$S \geqslant 2994$

Могут ли 23 ч ок. на 2 и 7 ч на 6? $\qquad +66 - 232 = -166$
$S \geqslant \frac{6+66}{2} \cdot 7 + \frac{2+222}{2} \cdot 23$
$S \geqslant 2828$

Могут ли 22 ч ок на 2 и 8 ч на 6?
$S \geqslant \frac{6+76}{2} \cdot 8 + \frac{2+212}{2} \cdot 22$
$S \geqslant 2682$

Могут ли 21 ч ок. на 2 и 9 ч на 6? $\qquad +86 - 212 = -126$
$S \geqslant \frac{6+86}{2} \cdot 9 + \frac{2+202}{2} \cdot 21$
$S \geqslant 2556$

Могут ли 20 ч ок. на 2 и 10 ч на 6?
$S \geqslant \frac{6+96}{2} \cdot 10 + \frac{2+192}{2} \cdot 20$
$S \geqslant 510 + 1940$
$S \geqslant 2450$
НО 10 чисел, оканчивающихся на 6 быть не может, т.к. тогда сумма 30 чисел оканчивается на 0, а не на 4, как 2454.

$\Rightarrow$ Искомое число $\geqslant 11$

② Покажем, что 11 чисел, оканчивающихся на 6, может быть:
$S \geqslant \frac{6+106}{2} \cdot 11 + \frac{2+182}{2} \cdot 19$
$S \geqslant 2364$

6 16 26 36 46 56 66 76 86 96 196

2 12 22 32 42 52 62 72 82 92 102 112 122 132 142 152 162 172 182

Получаем сумму: $S = \frac{6+96}{2} \cdot 10 + 196 + \frac{2+182}{2} \cdot 19 = 510 + 196 + 92 \cdot 19$
$= 2454$

Ответ: в) 11.