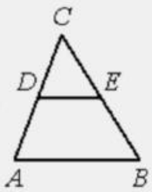
**1**

В треугольнике $ABC$ $DE$ — средняя линия. Площадь треугольника $CDE$ равна 24. Найдите площадь треугольника $ABC$.




509E9A

$k = 2$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CDE}} = 2^2$$

$S_{CDE} = 24$

$S_{ABC} = 96$

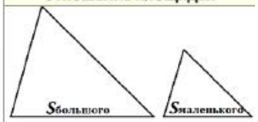
**ОТВЕТ** 9 6

**ИСТОЧНИКИ**

FIPI (старый банк)

Досрочная волна 2013

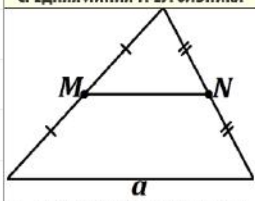
**ОТНОШЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ**




Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия

$$\frac{S_{\text{большого треугольника}}}{S_{\text{маленького треугольника}}} = k^2$$

**СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА**




- Лежит на серединах сторон
- Параллельна основанию
- Равна половине основания

**2**

Даны векторы $\vec{a}\ (4; y_a)$ и $\vec{b}\ (x_b; 0)$, косинус угла между которыми равен $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Найдите $y_a$. Если таких значений несколько, в ответ запишите большее из них.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot x_b + y_a \cdot 0 = \sqrt{16 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$4 \cdot x_b = \sqrt{16 + y_a^2} \cdot |x_b| \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$2\cancel{4} \cdot \cancel{x_b} = \sqrt{16 + y_a^2} \cdot \cancel{x_b} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{16 + y_a^2} = 2\sqrt{5}$$

$$16 + y_a^2 = 20$$

$$y_a^2 = 4 \qquad y_a = 2 \qquad \cancel{y_a = -2}$$

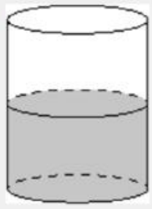
**ОТВЕТ** 2

**ИСТОЧНИКИ**

Ященко (36 вариантов) 2024

**3**

В цилиндрический сосуд налили 2800 см$^3$ воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 13 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.



791637

① $V_{воды} = 2800 = \pi \cdot R^2 \cdot 16$

$\pi R^2 = 175$

② $V_{воды} + V_{дет.} = \pi R^2 \cdot 29$

$2800 + V_{дет} = 175 \cdot 29$

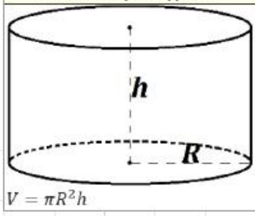
$V_{дет.} = 2275$

**ОТВЕТ** 2275

## ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2018
Основная волна 2017

**ОБЪЁМ ЦИЛИНДРА**




$V = \pi R^2 h$

**4**

Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже $36{,}8^\circ\mathrm{C}$, равна 0,89. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура тела окажется $36{,}8^\circ\mathrm{C}$ или выше.

5B0D72

$1 - 0{,}89 = 0{,}11$

**ОТВЕТ** 0,11

## ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2020

**ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ**

Сумма вероятностей наступления противоположных событий равна 1

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$

**ПРИМЕР:**

Событие $A$ — выпадение орла
Событие $\bar{A}$ — выпадение решки

Если при одном бросании монеты не выпал орёл, то точно выпадет решка

**5**

Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,5 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не меньше 0,8?

3C509C

① $P(\text{попасть}) = 0{,}5$

$P(\text{промах}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

② $P(\text{поражения цели}) \geq 0{,}8$

$P(\text{улететь}) \leq 0{,}2$

③ 1 выстрел — $P(\text{улететь}) = 0{,}5$

2 выстрел — $P(\text{улететь}) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

3 выстрел — $P(\text{улететь}) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$ ✓

**ОТВЕТ** 3

**ИСТОЧНИКИ**

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2023
Основная волна (Резерв) 2022

**ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ**

Сумма вероятностей наступления противоположных событий равна 1

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$

**ПРИМЕР:**

Событие $A$ — выпадение орла
Событие $\bar{A}$ — выпадение решки

Если при одном бросании монеты не выпал орёл, то точно выпадет решка

**6**

Найдите корень уравнения

$2^{x-3} = \frac{1}{16}$.

$2^{x-3} = 2^{-4}$

$x - 3 = -4$

$x = -4 + 3 = -1$

**ОТВЕТ** −1

**ИСТОЧНИКИ**

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2019
Досрочная волна (Резерв) 2018
Основная волна 2017
Пробный ЕГЭ 2015

| **СТЕПЕНИ** | |
|---|---|
| 1 | $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ |
| 2 | $a^n : a^m = a^{n-m}$ |
| 3 | $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ |
| 4 | $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ |
| 5 | $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ |
| 6 | $a^0 = 1$ |
| ✓ 7 | $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ |
| 8 | $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ |

**7** Найдите значение выражения
$\sqrt{754^2 - 304^2}$.

$= \sqrt{(754-304)\cdot(754+304)}$

$= \sqrt{450 \cdot 1058}$

$= \sqrt{2 \cdot 225 \cdot 2 \cdot 529} = 2 \cdot 15 \cdot 23 = 690$

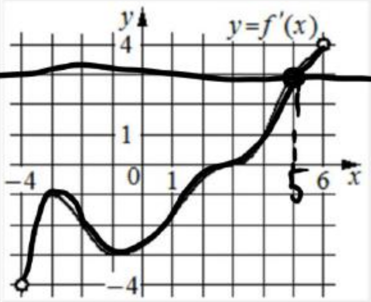
## ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна (Резерв) 2019

| ФСУ | |
|---|---|
| 1 | $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ |
| 2 | $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ |
| 3 | $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ |
| 4 | $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ |
| 5 | $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ |
| 6 | $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ |
| 7 | $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ |

**ОТВЕТ** 690

**8** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 6)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x$ или совпадает с ней.




① $K_{\text{прямой } y=3x} = 3$

② $K_{\text{касат.}} = 3$

③ $f'(x_0) = 3$

Решим графически

## ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ**

$f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha$

**ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ**

Есть две прямые $y_1 = k_1x + b_1$, $y_2 = k_2x + b_2$

1. Если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, то прямые совпадают
**ПРИМЕР:** $y_1 = 2x + 7$ и $y_2 = 2x + 7$
2. Если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые параллельны
**ПРИМЕР:** $y_1 = 2x + 7$ и $y_2 = 2x - 5$
3. Если $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются
**ПРИМЕР:** $y_1 = 2x + 7$ и $y_2 = 3x + 7$

**ОТВЕТ** 5

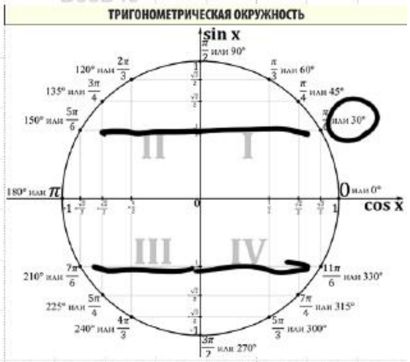
**9**

Два тела, массой $m = 2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 8$ м/с под углом $2\alpha$ друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где $m$ — масса (в кг), $v$ — скорость (в м/с). Найдите, под каким углом $2\alpha$ должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 32 Дж. Ответ дайте в градусах.

D33D49

**ИСТОЧНИКИ**

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2020




$$32 = 2 \cdot 8^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30$$

$$2\alpha = 60$$

**ОТВЕТ** 60

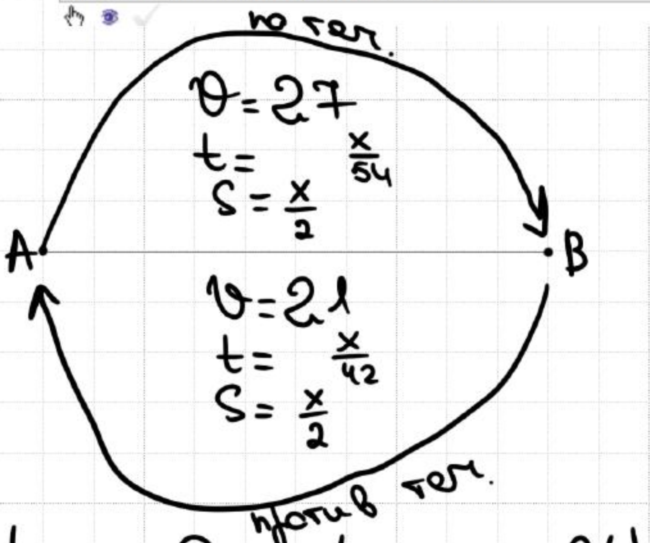
**10**

Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 24 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 34 часа после отправления из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

FE9990

**ИСТОЧНИКИ**

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017




$$t_{\rightarrow} + 2 + t_{\leftarrow} = 34$$

$$\frac{x}{54} + \frac{x}{42} = 32$$

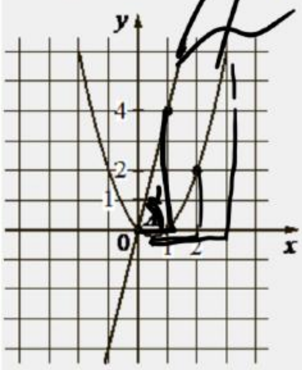
$$\frac{96 \cdot x}{54 \cdot 42} = 32$$

$$x = \frac{\cancel{32} \cdot 54 \cdot \cancel{42}^{14}}{\cancel{96}\,\cancel{3}} = 756$$

**ОТВЕТ** 756

**11**

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках $A$ и $B$. Найдите абсциссу точки $B$.




E18EA6

① $a = 1$

$c = 0$

$x_0 = \frac{-b}{2a}$

$0{,}5 = \frac{-b}{2}$

$b = -1$

$y = 1x^2 - x + 0$

② $x^2 - x = 4x$

$x^2 - 5x = 0$

$x \cdot (x-5) = 0$

$x_A = 0$  $x_B = 5$

**ОТВЕТ** 5

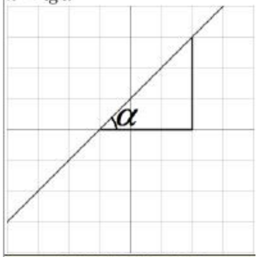
## ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2023

**ЗА ЧТО ОТВЕЧАЕТ $k$**

$k$ отвечает за наклон прямой

$k = \operatorname{tg}\alpha$




**ВЕРШИНА ПАРАБОЛЫ**

$x_0 = \frac{-b}{2a}$

**12**

Найдите наименьшее значение функции

$$y = 8\cos x + \frac{30}{\pi}x + 19$$

на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

0A887D

① $y' = -8\sin x + \frac{30}{\pi} = 0$

$\frac{30}{\pi} = 8 \cdot \sin x$

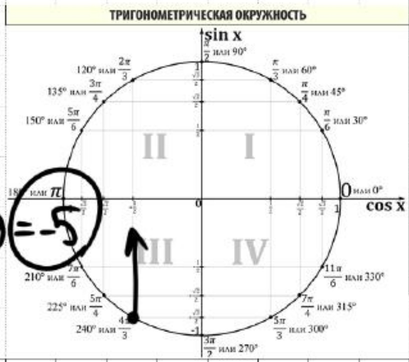
$\sin x = \frac{30}{\pi \cdot 8} \approx \frac{30}{8 \cdot 3{,}14}$

Нет решений

② $y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\cancel{30}^{10}}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{3}} + 19 = -5$

$y(0) = 8 \cdot 1 + 19 = 27$

**ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ**




**ОТВЕТ** −5

## ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2017
Пробный ЕГЭ 2015

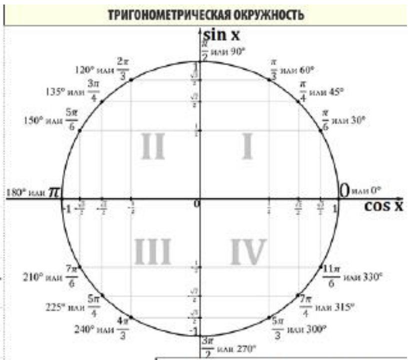
**ПРОИЗВОДНЫЕ**

| | |
|---|---|
| 1 | $C' = 0$ |
| 2 | $x' = 1$ |
| 3 | $(Cx)' = C$ |
| 4 | $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ |
| 5 | $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| 6 | $(U \cdot V)' = U'V + UV'$ |
| 7 | $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$ |
| 8 | $(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$ |
| 9 | $(\sin x)' = \cos x$ |
| 10 | $(\cos x)' = -\sin x$ |
| 11 | $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| 12 | $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| 13 | $(e^x)' = e^x$ |
| 14 | $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ |
| 15 | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ |
| 16 | $(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$ |

**13** а) Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos x+1}=1-\cos x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.




**ИСТОЧНИКИ**

Досрочная волна 2018

**ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ**

| | |
|---|---|
| 1 | $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ |
| 2 | $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ |
| 3 | $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ |
| 4 | $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$ |

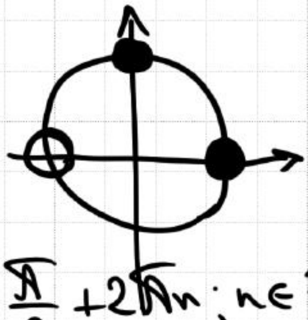
а) $\frac{\sin x}{\cos x+1}-\frac{1^{\backslash \cos x+1}}{1}+\frac{\cos x^{\backslash \cos x+1}}{1}=0$

$$\frac{\sin x-\cancel{\cos x}-1+\cos^2 x+\cancel{\cos x}}{\cos x+1}=0$$

$$\frac{\sin x-\cancel{1}+\cancel{1}-\sin^2 x}{\cos x+1}=0$$

$$\frac{\sin x\cdot(1-\sin x)}{\cos x+1}=0$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=1\end{array}\right.\\ \cos x\neq-1\end{cases}$$



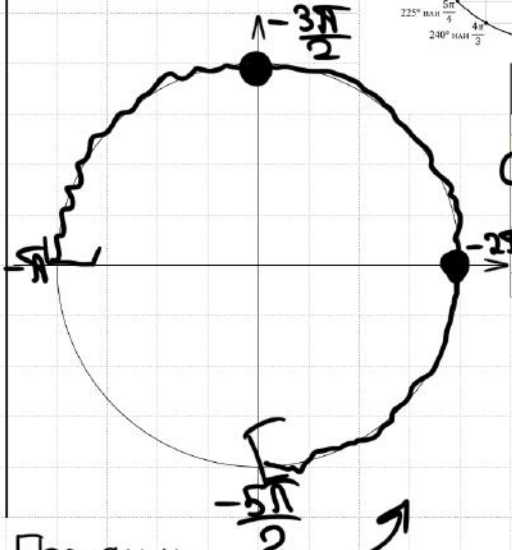
Получаем $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ n\in Z$

$x=2\pi n;\ n\in Z$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ 2\pi n;\ n\in Z$

б) $-2\pi;\ -\frac{3\pi}{2}$

б) Отберём корни с помощью окружности




Получим

$x=-2\pi$

$x=-\frac{3\pi}{2}$

**14**

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB$ равна 6, а боковое ребро $SA$ равно 4. Точки $M$ и $N$ — середины рёбер $SA$ и $SB$ соответственно. Плоскость $\alpha$ содержит прямую $MN$ и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

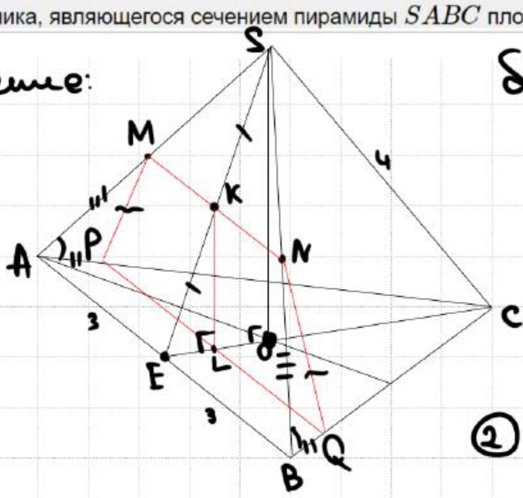
а) Докажите, что плоскость $\alpha$ делит медиану $CE$ основания в отношении $5:1$, считая от точки $C$.

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью $\alpha$.

64597E

**ИСТОЧНИКИ**

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Материалы для экспертов ЕГЭ




а) ① Построим сечение:

MN

MN – ср. лин. △ABS

MK – ср. лин. △ASE

⇒ K – сер. SE

KL ∥ SO

L ∈ CE

Построим PQ ∥ MN
L ∈ PQ

PM

QN

PMNQ – сеч.

② O – точка пересеч. медиан

$\frac{CO}{EO} = \frac{2}{1} = \frac{4x}{2x}$

KL – ср. линия △SEO ⇒ EL = x = OL

Получаем $\frac{CL}{EL} = \frac{5x}{x} = \frac{5}{1}$ ■

б) ① MNQP – трапеция

$MN = \frac{1}{2} AB = 3$

$PQ = \frac{5}{6} \cdot AB = 5$

(т.к. △CPQ ∼ △ABC с $k = \frac{5}{6}$)

② △SOC:

$OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 2\sqrt{3}$

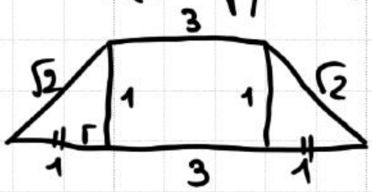
$SO = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$

KL = 1

MP = NQ

(т.к. △BQN = △APM по СУС)

③ MNQP – р/б. трап.




$P = 8 + 2\sqrt{2}$

Ответ: $8 + 2\sqrt{2}$.

**15** Решите неравенство

$$\log_5^2(x-1)-\log_5^2(x-5)\le 0.$$

$$\left(\log_5(x-1)-\log_5(x-5)\right)\cdot\left(\log_5(x-1)+\log_5(x-5)\right)\le 0$$

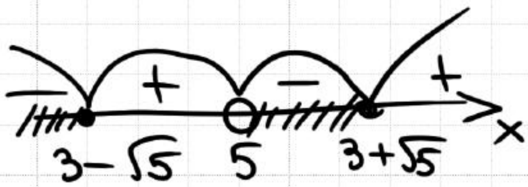
$$\left(\log_5(x-1)-\log_5(x-5)\right)\cdot\left(\log_5(x-1)-(-1)\cdot\log_5(x-5)\right)\le 0$$

$$\left(\log_5(x-1)-\log_5(x-5)\right)\cdot\left(\log_5(x-1)-\log_5\frac{1}{x-5}\right)\le 0$$

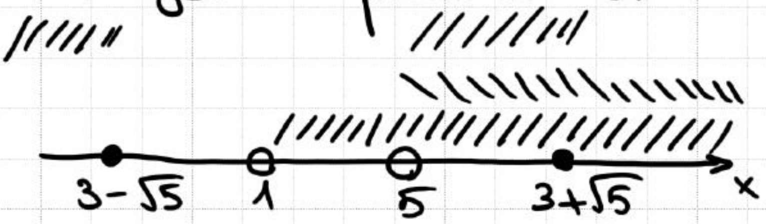
$$\begin{cases} ①\ x-1>0 \\ ②\ x-5>0 \\ ③\ (\cancel{5-1})\cancel{(x-1-x+5)}\cdot(\cancel{5-1})\cdot\left(\frac{x}{1}-\frac{1}{1}-\frac{1}{x-5}\right)\le 0 \end{cases}$$

① $x>1$ ② $x>5$ ③ $\dfrac{x^2-5x-x+5-1}{x-5}\le 0$

$$\frac{x^2-6x+4}{x-5}\le 0$$




Найдём пересечение:




Ответ: $(5;\ 3+\sqrt{5}]$

**ИСТОЧНИКИ**

Основная волна 2023

| ФСУ | |
|---|---|
| 1 | $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ |
| 2 | $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ |
| 3 | $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ |
| 4 | $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ |
| 5 | $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ |
| 6 | $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ |
| 7 | $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ |

**МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ**

| БЫЛО | СТАЛО |
|---|---|
| $\log_a f-\log_a g$ | $(a-1)(f-g)$ |
| $a^f-a^g$ | $(a-1)(f-g)$ |
| $\lvert f\rvert-\lvert g\rvert$ | $(f-g)(f+g)$ |
| $\sqrt{f}-\sqrt{g}$ | $(f-g)$ |

| СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ | |
|---|---|
| 1 | $\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$ |
| 2 | $\log_a b-\log_a c=log_a\frac{b}{c}$ |
| v3 | $\log_a b^m=m\cdot\log_a b$ |
| 4 | $\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\cdot\log_a b$ |
| 5 | $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ |
| 6 | $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ |

**16**

Строительство нового завода стоит 159 млн рублей. Затраты на производство $x$ тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене $p$ тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?



① Прибыль за один год $= px - (0{,}5x^2+2x+6)$
$= -0{,}5x^2 - 2x + px - 6$
$= -0{,}5x^2 + (p-2)\cdot x - 6$

Это квадратичная ф-ция. График - парабола. Ветви ↓, значит наиб. знач. ф-ции достигается в вершине

$x_{верш} = \frac{-(p-2)}{-1} = p-2$

Прибыль наиб. $= -\frac{1}{2}\cdot(p-2)^2 + (p-2)^2 - 6$
$= \frac{(p-2)^2}{2} - 6$

② 1 год: Прибыль $= \frac{(10-2)^2}{2} - 6 = 26$ млн

2 год: Прибыль $= \frac{(11-2)^2}{2} - 6 = 34{,}5$ млн

3 год: Прибыль $= \frac{(12-2)^2}{2} - 6 = 44$ млн

4 год: Прибыль $= \frac{(13-2)^2}{2} - 6 = 54{,}5$ млн

$26 + 34{,}5 + 44 + 54{,}5 = 159$ (млн)

Значит строительство окупится за 4 года

Ответ: 4

**17**

В равнобедренном тупоугольном треугольнике $ABC$ на продолжение боковой стороны $BC$ опущена высота $AH$. Из точки $H$ на сторону $AB$
и основание $AC$ опущены перпендикуляры $HK$ и $HM$ соответственно.

а) Докажите, что отрезки $AM$ и $MK$ равны.

б) Найдите $MK$, если $AB = 5$, $AC = 8$.

**ИСТОЧНИКИ**

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)

а) ① Пусть $\angle KAM = \alpha$

Тогда $\angle C = \alpha$ (т.к. $\triangle ABC$ – р/б)

$\angle ABC = 180 - \angle A - \angle C = 180 - 2\alpha$

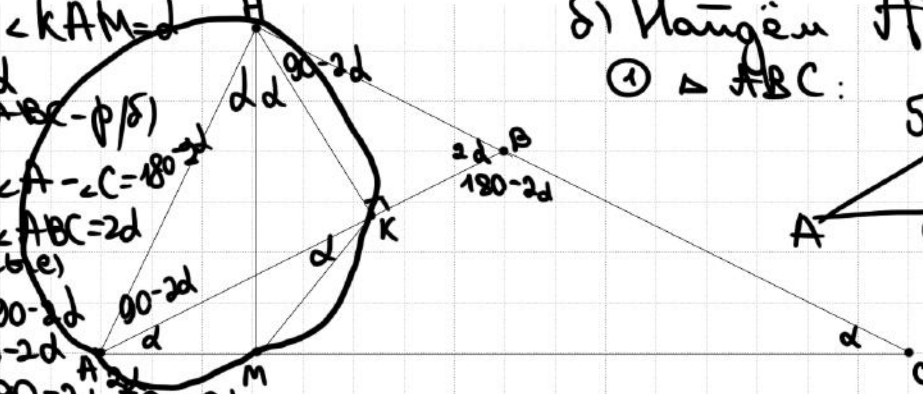
$\angle ABH = 180 - \angle ABC = 2\alpha$ (смежные)

$\angle BHK = 180 - 90 - 2\alpha = 90 - 2\alpha$

$\angle HAB = 180 - 90 - 2\alpha = 90 - 2\alpha$

$\angle AHM = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$

$\angle KHM = 90 - (90 - 2\alpha) - \alpha = \alpha$




② $\angle AKH = 90^\circ = \angle AMH$

Эти угла равны и опир. на отрезок $AH$

$\Rightarrow$ Можно описать около $AHKM$ окр-ть с диаметром $AH$

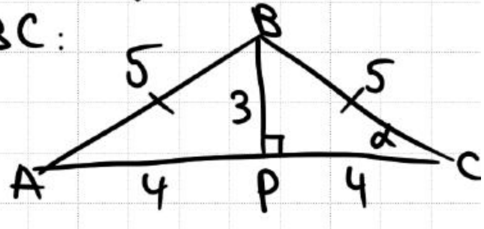
Тогда $\angle AKM = \alpha = \angle AHM$ (опираются на одну дугу)

$\triangle AMK$ – р/б.

$AM = MK$ [redacted]

б) Найдём $AM$:

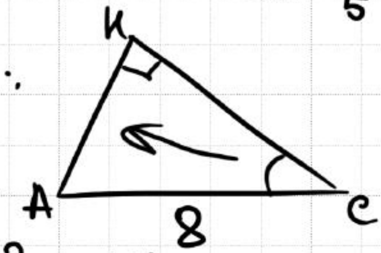
① $\triangle ABC$:




$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$

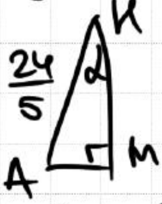
② $\triangle ACH$:




$\sin\alpha = \frac{3}{5} = \frac{AH}{8}$

$AH = \frac{3 \cdot 8}{5} = \frac{24}{5}$

③ $\triangle AHM$:




$\sin\alpha = \frac{3}{5} = \frac{AM \cdot 5}{24}$

$AM = \frac{72}{25} = 2{,}88.$

Ответ: 2,88.

**18**

Найдите все значения $a$, при которых уравнение

$$\left|\sin^2 x + 2\cos x + a\right| = \sin^2 x + \cos x - a$$

имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\, \pi\right]$ единственный корень.

8A3C16

**ИСТОЧНИКИ**

FIPI (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2013

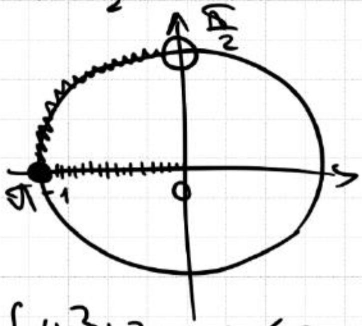
$$\left[\begin{array}{l} (1)\ \begin{cases} \sin^2 x + 2\cos x + a \geq 0 \\ \cancel{\sin^2 x} + 2\cos x + a = \cancel{\sin^2 x} + \cos x - a \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} \\ (2)\ \begin{cases} \sin^2 x + 2\cos x + a < 0 \\ -\sin^2 x - 2\cos x - \cancel{a} = \sin^2 x + \cos x - \cancel{a} \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} \end{array}\right.$$

(1) $\begin{cases} \sin^2 x + 2\cos x + a \geq 0 \\ \cos x = -2a \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

$\begin{cases} -\cos^2 x + 2\cos x + a + 1 \geq 0 \\ \cos x = -2a \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

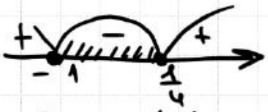
$\begin{cases} -4a^2 - 4a + a + 1 \geq 0 \\ \cos x = -2a \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

$\begin{cases} -4a^2 - 3a + 1 \geq 0 \\ \cos x = -2a \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$




$\begin{cases} 4a^2 + 3a - 1 \leq 0 \\ -1 \leq -2a < 0 \end{cases} \quad \Big| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

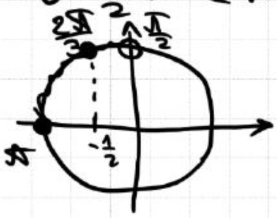
$\begin{cases} \text{(см. рис.)} \\ 0 < a \leq \frac{1}{2} \end{cases}$




$\Rightarrow$ при $a \in \left(0;\, \frac{1}{4}\right]$
есть 1 решение у системы 1

(2) $\begin{cases} \sin^2 x + 2\cos x + a < 0 \\ 2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0 \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

$\begin{cases} \sin^2 x + 2\cos x + a < 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 2 \ \varnothing \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

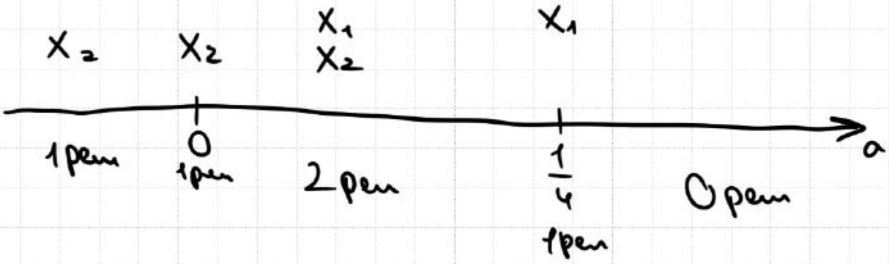



$$x = \frac{2\pi}{3}$$

$\sin^2 \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + a < 0$

$\frac{3}{4} - 1 + a < 0$

при $a < \frac{1}{4}$ есть 1 реш. у второй системы




Ответ: $(-\infty;\, 0] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

**19**

а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

**ИСТОЧНИКИ**

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018

а) $a\cdot b\cdot c\cdot d = 10\cdot(a+b+c+d)$

① Среди цифр нет нулей
② Среди цифр есть 5 и чётная цифра (но не 0)

Если $a=5$, $b=2$ например, то

$5\cdot 2\cdot c\cdot d = 10\cdot(5+2+c+d)$

$c\cdot d = 7+c+d$

$cd - c = 7+d$

$c\cdot(d-1) = 7+d$

$c = \frac{7+d}{d-1}$ $\quad d=2$, $c=9$

5292 $\quad$ т.к. $\frac{5\cdot 2\cdot 9\cdot 2}{18} = 10$

Ответ: а) 5292

б) $a\cdot b\cdot c\cdot d = 175\cdot(a+b+c+d)$

① Среди цифр должны быть 5, 5, 7

Если $a=5$, $b=5$, $c=7$

$175d = 175(5+5+7+d)$

$d = 17+d$

$0\cdot d = 17$

Нет решений для $d$

$\Rightarrow$ такого четырёхзначн. числа не существует

Ответ: б) нет

**19**

а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

в) $a\cdot b\cdot c\cdot d = 50\cdot(a+b+c+d)$

Среди цифр есть точно 5; 5 и чётная (но не 0)

Есть 4 варианта:

① $a=5$, $b=5$, $c=2$

$\cancel{50}\cdot d = \cancel{50}\cdot(12+d)$

$0\cdot d = 12$

нет реш.

② $a=5$, $b=5$, $c=4$

$5\cdot 5\cdot 4\cdot d = 50\cdot(14+d)$

$2d = 14+d$

$d = 14$

не подходит

③ $a=5$, $b=5$, $c=6$

$3d = 16+d$

$2d = 16$

$d = 8$

④ $a=5$, $b=5$, $c=8$, $d=6$

$\Rightarrow$ Нам подходят все 4хзначные числа из цифр 5568

Ответ: 5568
5586
5865
5856
5658
5685
6855
6585
6558
8655
8565
8556