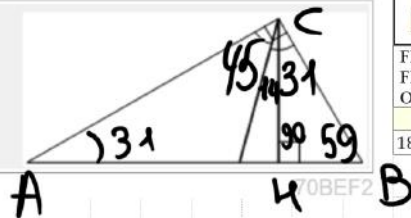


1

В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 14° . Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.



ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна (Резерв) 2019
 СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА
 180°

ОТВЕТ | 3 | 1

2

Даны векторы $\vec{a} (3; -1)$, $\vec{b} (2; 0)$ и $\vec{c} (4; c_0)$. Найдите c_0 , если $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

$$-\vec{b}(-2; 0)$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 4 - c_0 = 0$$

$$c_0 = 4$$

ИСТОЧНИКИ

Ященко (36 вариантов) 2024

ОТВЕТ | 4

3

Радиусы двух шаров равны 9 и 12. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

$$\textcircled{1} S_{\text{пов.}_1} = 4\pi \cdot 9^2 = 324\pi$$

$$S_{\text{пов.}_2} = 4\pi \cdot 12^2 = 576\pi$$

$$S_{\text{пов.}_3} = 324\pi + 576\pi = \boxed{900\pi} = 4\pi \cdot R^2$$

$$R^2 = 225$$

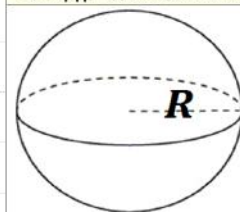
$$R = 15$$

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ШАРА



$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$

ОТВЕТ | 15

4

Дима, Марат, Петя, Надя и Света бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.



42eF9e

$$P = \frac{3}{5} = 0,6$$

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)

ФИПИ (новый банк)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$p = \frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$

ОТВЕТ | 0,6

5

Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 8».

97B50F

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

$$P = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 0,12$$

ОТВЕТ | 0 , 1 2

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна (Резерв) 2023
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ
 $P = \frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$

6

Найдите корень уравнения $49^{x-2} = \frac{1}{7}$.

565F20

$$(7^2)^{x-2} = 7^{-1}$$

$$7^{2x-4} = 7^{-1}$$

$$2x - 4 = -1$$

$$2x = 3$$

$$x = 1,5$$

ОТВЕТ | 1 , 5

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна 2015
 Пробный ЕГЭ 2015

СТЕПЕНИ

1 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2 $a^n : a^m = a^{n-m}$

3 $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

4 $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

5 $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

6 $a^0 = 1$

7 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

8 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

7

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[15]{5} \cdot 5 \cdot \sqrt[10]{5}}{\sqrt[6]{5}}$.



D818A9

$$\frac{5^{\frac{1}{15}} \cdot 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{10}}}{5^{\frac{1}{6}}} = \frac{5^{\frac{1}{15} + 1 + \frac{1}{10}}}{5^{\frac{1}{6}}} = \frac{5^{\frac{30}{30} + \frac{30}{30} + \frac{3}{10}}}{5^{\frac{5}{30}}} = \frac{5^{\frac{63}{30}}}{5^{\frac{5}{30}}} = 5^{\frac{58}{30}} = 5$$

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна 2017
 Досрочная волна 2015

КОРНИ

- 1 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- 2 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
- 3 $(\sqrt{a})^2 = a$
- 4 $\sqrt{a^2} = |a|$
- 5 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

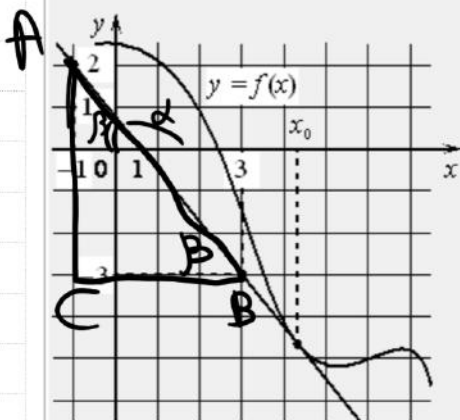
СТЕПЕНИ

- 1 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- 2 $a^n : a^m = a^{n-m}$
- 3 $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- 4 $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- 5 $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- 6 $a^0 = 1$
- 7 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- 8 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

ОТВЕТ 5

8

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



5D7FC4

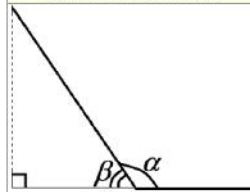
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{5}{4} = 1,25 \\ \operatorname{tg} \alpha &= -1,25 \end{aligned}$$

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Демо 2023
 Демо 2022
 Демо 2021
 Демо 2020
 Основная волна (Резерв) 2023
 Основная волна 2022
 Пробный ЕГЭ 2019
 Основная волна (Резерв) 2017
 Основная волна 2013

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ
ПРОИЗВОДНОЙ

$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$
 СИНОС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И
 КОТАНГЕНС ТУПЫХ УГЛОВ



$\sin \alpha = \sin \beta$
 $\cos \alpha = -\cos \beta$
 $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$
 $\operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg} \beta$

ОТВЕТ -1,25

9

Наблюдатель находится на высоте h , выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное

в километрах, вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 64 километра? Ответ дайте в метрах.

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)

69С186

$$64 = \sqrt{\frac{6400 \cdot h}{500}} \quad |^2$$

$$64^2 = \frac{64 \cdot h}{5}$$

$$h = 320 \text{ м}$$

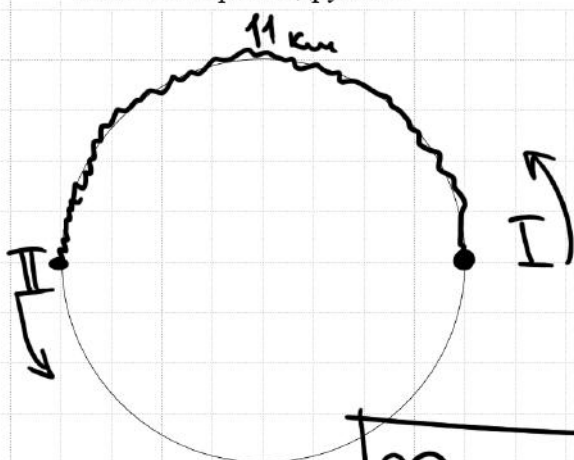
ОТВЕТ | 3 2 0

10

Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 22 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 20 км/ч больше скорости другого?

ИСТОЧНИКИ

Основная волна (Резерв) 2017



$$v_{\text{быстр.}} = 20 \text{ км/ч}$$

$$S_{\text{быстр.}} = 11 \text{ км}$$

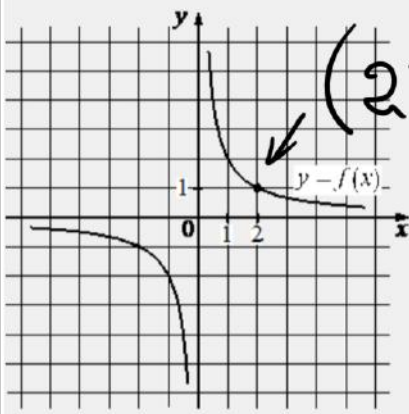
$$t = \frac{11 \text{ км}}{20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} = \frac{11}{20} \text{ ч} \cdot 60 \frac{\text{мин}}{\text{ч}} = 33 \text{ мин}$$

20 км за 60 мин
11 км за X мин

ОТВЕТ | 3 3

11

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



①

$$1 = \frac{k}{2} \quad k = 2$$

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

② $f(10) = \frac{2}{10} = 0,2$

ОТВЕТ | 0,2

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2022

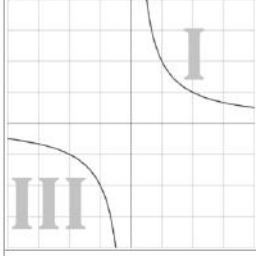
УРАВНЕНИЕ ГИПЕРБОЛЫ

$$y = \frac{k}{x}$$

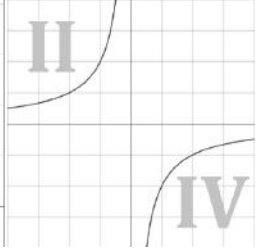
ЗА ЧТО ОТВЕЧАЕТ k

k отвечает за расположение ветвей гиперболы в разных четвертях

$$k > 0$$



$$k < 0$$



12

Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2 + 441}{x}$ на отрезке $[2; 32]$.

① $y' = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 441) \cdot 1}{x^2} = 0$

$$\frac{2x^2 - x^2 - 441}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 441$$

$$x = 21$$

~~$$x = 21$$~~

② $y(21) = \frac{441 + 441}{21} = 42$

$$y(2) = 222,5$$

$$y(32) = \text{много}$$

ОТВЕТ | 42

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2013

ПРОИЗВОДНЫЕ

1 $C' = 0$

2 $x' = 1$

3 $(Cx)' = C$

4 $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

5 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6 $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

7 $(\frac{U}{V})' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

8 $(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$

9 $(\sin x)' = \cos x$

10 $(\cos x)' = -\sin x$

11 $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12 $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13 $(e^x)' = e^x$

14 $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

15 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

16 $(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

13 а) Решите уравнение

$$2\log_9^2 x - 3\log_9 x + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{10}; \sqrt{99}]$.

а) Пусть $\log_9 x = t$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$t = 1$$

$$\log_9 x = 1$$

$$x = 9$$

$$t = \frac{1}{2}$$

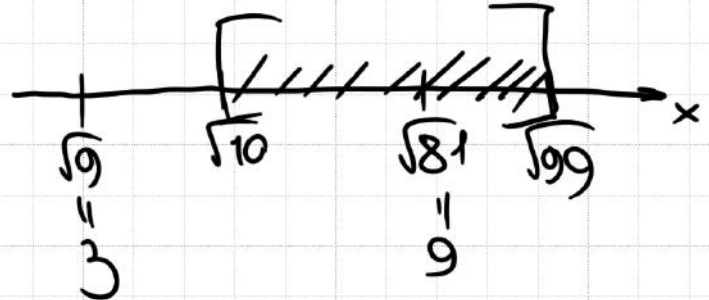
$$\log_9 x = \frac{1}{2}$$

$$x = 3$$

Ответ: а) 9, 3
б) 9

б) $3 = \sqrt{9}$

$$9 = \sqrt{81}$$



Помечаем

$$3 \notin [\sqrt{10}; \sqrt{99}]$$

$$9 \in [\sqrt{10}; \sqrt{99}]$$

13.14 Треугольная пирамида (13.14 - 13.17)

В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 7, SC = 5$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы SM треугольника ABC . Эта высота равна 4.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

а) 1 способ

① $AB \perp SM$ (т.к. $SM \perp \alpha_{ABC}$)

$AB \perp SM$ (т.к. SM - высота в $\triangle ABC$)

$AB \perp (SMH)$

$AB \perp MH$

$\Rightarrow SM$ - медиана и высота $\triangle ABC$

$\Rightarrow \triangle ABC$ - \triangle

2 способ

① SM - высота $\triangle SAB$ - \triangle и медиана

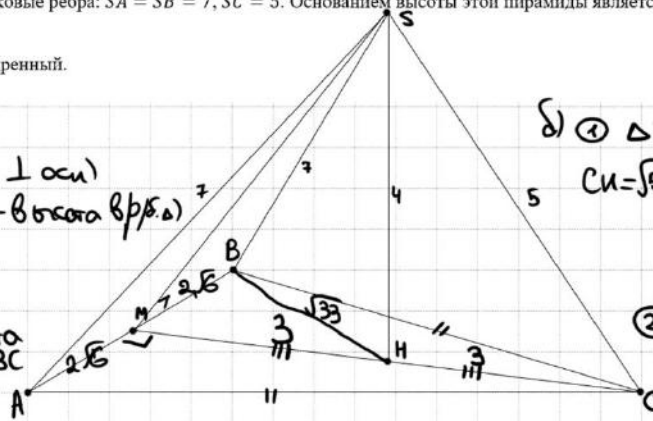
② $\triangle SMH$:

SM - наклонная

MH - проекция

$SM \perp AB \Rightarrow MH \perp AB$ по т. Фр ГТТ

ОТВЕТ: $16\sqrt{6}$



б) ① $\triangle SCH$:

$$CH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

② $\triangle SBH$:

$$BH = \sqrt{7^2 - 4^2} = \sqrt{33}$$

③ $\triangle MBH$:

$$BM = \sqrt{33 - 9} = 2\sqrt{6} = AM$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 6 \cdot 4 = 16\sqrt{6}$$

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2016
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА
Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

Источники:

Основная волна 2017

ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛАХ

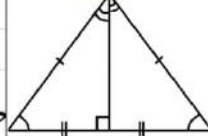


Прямая, проведённая в плоскости и перпендикулярная наклонной, перпендикулярна и проекции наклонной на эту плоскость



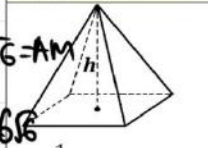
Прямая, проведённая в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной

СВОЙСТВО



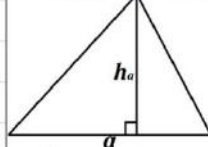
Биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию, равны

ОБЪЁМ ПИРАМИДЫ



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot h$$

ПЛОЩАДЬ (ЧЕРЕЗ ВЫСОТУ)



$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

15

Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 5^{2x} - 3 \cdot 5^x \cdot 2^{x+1} + 4^{x+1}}{10^x - 2^{2x}} \leq 1.$$

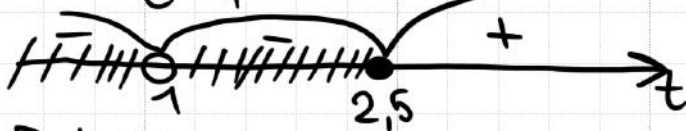
$$\frac{2 \cdot 25^x - 6 \cdot 10^x + 4 \cdot 4^x}{10^x - 4^x} - \frac{1}{1} \leq 0 \quad (10^x - 4^x)$$

$$\frac{2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x + 5 \cdot 4^x}{10^x - 4^x} \leq 0 \quad \left| \begin{array}{l} : 4^x \\ : 4^x \end{array} \right.$$

$$\frac{2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 5}{\left(\frac{5}{2}\right)^x - 1} \leq 0$$

Пусть $\left(\frac{5}{2}\right)^x = t$

$$\frac{2t^2 - 7t + 5}{t - 1} \leq 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t < 1 \\ 1 < t \leq 2,5 \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^x < \frac{5}{2}$$

$$x < 0$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^x \leq \left(\frac{5}{2}\right)^1$$

$$0 < x \leq 1$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 1]$

ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна 2018

СТЕПЕНИ

1 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2 $a^n : a^m = a^{n-m}$

3 $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

4 $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

5 $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

6 $a^0 = 1$

7 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

8 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

В школе планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на 8 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

Пусть x - месяцы, начиная с мая

$$1,16 = \frac{116}{100} = \frac{29}{25}$$

Дата	Сумма долга
1	5 млн
2	$5 \cdot \frac{29}{25} = \frac{29}{5}$ млн
3	$5 \cdot \frac{29}{25} = \frac{29}{5}$ млн
4	$5 \cdot \frac{29}{25} = \frac{29}{5}$ млн
5	$5 \cdot \frac{29}{25} = \frac{29}{5}$ млн
6	$5 \cdot \frac{29}{25} = \frac{29}{5}$ млн
7	$5 \cdot \frac{29}{25} = \frac{29}{5}$ млн
8	0

\Rightarrow с.в. $\frac{57}{40}$
 \Rightarrow с.в. $\frac{53}{40}$
 \Rightarrow с.в. $\frac{49}{40}$
 \Rightarrow с.в. $\frac{29}{40}$

Выплата обр. ариф. прогр. Востр. р-лот

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$O.C.B. = \frac{\frac{57}{40} + \frac{29}{40}}{2} \cdot 8 = 8,6 \text{ млн}$$

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{29}{5} = \frac{203}{40}$$

Ответ: 8,6.

$$\sqrt{15x^2 + 6ax + 9} = x^2 + ax + 3$$

имеет ровно три различных корня.

$$\begin{cases} \textcircled{1} & x^2 + ax + 3 \geq 0 \\ \textcircled{2} & 15x^2 + 6ax + 9 = (x^2 + ax + 3)^2 \end{cases}$$

Решим уравнение $\textcircled{2}$

$$15x^2 + 6a \cdot x + 9 = x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot (ax + 3) + (ax + 3)^2$$

$$15x^2 + 6ax + 9 = x^4 + 2 \cdot a \cdot x^3 + 6x^2 + a^2 \cdot x^2 + 6 \cdot a \cdot x + 9$$

$$x^4 + 2 \cdot a \cdot x^3 + a^2 \cdot x^2 - 9x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (x^2 + 2a \cdot x + a^2 - 9) = 0$$

$$x^2 \cdot ((x+a)^2 - 3^2) = 0$$

$$x^2 \cdot (x+a-3)(x+a+3) = 0$$

$$x=0 \quad x=3-a \quad x=-3-a$$

Чтобы корни были различными, нужно

$$\begin{cases} 3-a \neq 0 \\ -3-a \neq 0 \\ 3-a \neq -3-a \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq 3 \\ a \neq -3 \end{cases}$$

Найдем при каких a корни удов. нерав-ву $\textcircled{1}$

$$0^2 + a \cdot 0 + 3 \geq 0$$

a - любое,
кроме ± 3

$$(3-a)^2 + a \cdot (3-a) + 3 \geq 0$$

$$9 - 6a + a^2 + 3a - a^2 + 3 \geq 0$$

$$12 \geq 3a$$

$$a \leq 4$$

$$x^2 + ax + 3 \geq 0$$

$$(-3-a)^2 + a \cdot (-3-a) + 3 \geq 0$$

$$9 + 6a + a^2 - 3a - a^2 + 3 \geq 0$$

$$3a \geq -12$$

$$a \geq -4$$

Ответ: $[-4; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; 4]$

На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причём любые два из них отличаются не более чем в три раза.

- а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?
 б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?
 в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

а) 7 8 9 10 13
 Ответ: а) да, например ↑

б) Пусть

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10}$$

$$\textcircled{2} \frac{a_{10}}{a_1} \leq 3 \quad | \cdot a_1$$

$$a_{10} \leq 3a_1$$

$$\textcircled{3} a_{10} - a_1 \geq 9$$

$$a_{10} \geq a_1 + 9$$

$$a_1 + 9 \leq a_{10} \leq 3a_1$$

$$2a_1 \geq 9$$

$$a_1 \geq 4,5$$

$$a_1 \geq 5$$

Тогда $S \geq \frac{5+14}{2} \cdot 10$

$$S \geq 95 \Rightarrow S \neq 94$$

Ответ: б) нет

На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причём любые два из них отличаются не более чем в три раза.

- а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?
 б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?
 в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

в) Разложим 8000 на простые множители:

$$8000 = 2^6 \cdot 5^3$$

8000	2
4000	2
2000	2
1000	2
500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

② Может ли быть 2 числа?
 Да, $64 \cdot 125 = 8000$

③ Может ли быть 3 числа?
 Да, 16 20 25

④ Может ли быть 4 числа?

Если есть число, кратное 25

25... 5... ..

Есть число, кратное 25

Тогда все три оставшихся

числа д.б. ≥ 8 но

тогда их произведение

будет больше 8000, что

противоречит условию.

Если нет числа, кр. 25

5... 5... 5... ..

В такой ситуации есть три числа, кратные 5 и тогда один из них как минимум в 4 раза больше другого, что противоречит условию.

\Rightarrow 4 и более чисел быть не может

Ответ: в) 2 или 3.