Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
Тренировочный вариант № 458

Профильный уровень
Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

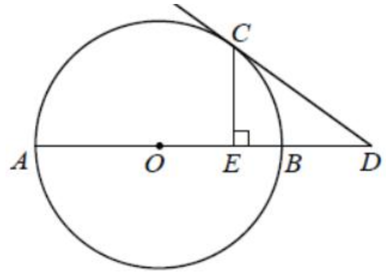
Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. К окружности с центром в точке O проведена касательная CD, AB – диаметр окружности, CE = 12, EB = 6, Найдите BD.

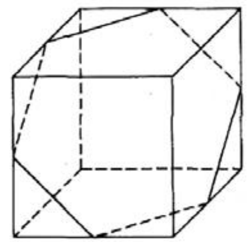


Ответ: ________________________.

2. Найдите, при каком значении t точки A (7;-1), B (8;5) и C (4;t) лежат на одной прямой.

Ответ: ________________________.

3. Сечение куба, предтставляет собой правильный шестиугольник площадью $3\sqrt{3}$. Найдите площадь полной поверхности куба.



Ответ: ________________________.

4. В городе 48% взрослого населения — мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Ответ: ________________________.

5. Игральный кубик бросают два раза. Известно, что в первый раз выпало больше очков, чем во второй. Найдите вероятность того, что в первый раз выпало нечётное число очков.

Ответ: ________________________.

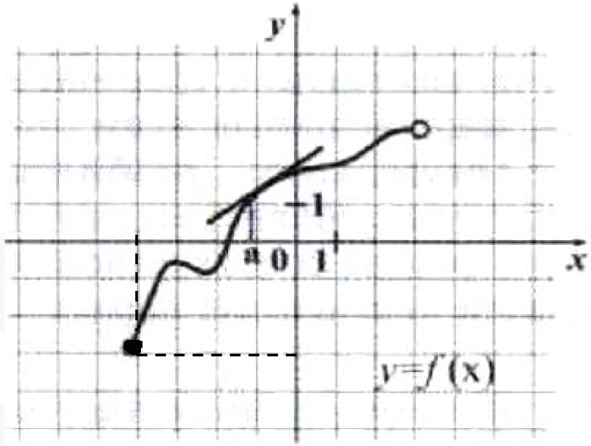
6. Решите уравнение $9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}=5^{\log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2+1\right)}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Ответ: ________________________.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{a}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{a^4}}+\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}-\left(\sqrt[3]{a}\right)^5}{a^{\frac{2}{3}}-\left(\sqrt[3]{a}\right)^{-1}}$ при $a\neq 0$.

Ответ: ________________________.

8. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательной к графику этой функции, проведённой в точке графика с абсциссой a. Эта касательная параллельна отрезку, соединяющему точки графика функции с абсциссами —4 и 1. Найдите значение производной этой функции в точке a.



Ответ: ________________________.

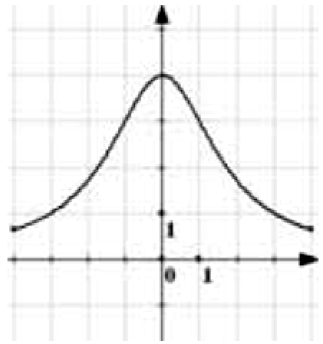
9. Груз массой 0,15 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t)=0{,}4\sin\pi t$, где t — время в секундах. Кинетическая энергия груза, измеряемая в джоулях, вычисляется по формуле $E=\dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее $3\cdot 10^{-3}$ Дж. Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Ответ: ________________________.

10. Между стартом и финишем горнолыжного спуска круглосуточно действует подвесная канатная дорога. Кабинки сверху и снизу отправляются одновременно каждые 3 минуты. Время движения в одну сторону составляет 14 минут. На старте и финише кабинка стоит 1 минуту, включая режим проскальзывания каната. Определите количество кабинок, двигающихся вниз, которые встречаются горнолыжнику при подъёме.

Ответ: ________________________.

11. На рисунке изображен фрагмент графика функции $y=f(x)$, определенной для всех действительных чисел. Ее наименьший положительный период равен 8. Найдите значение выражения $f(7)\cdot f(16)$



Ответ: ________________________.

12. Найдите точку максимума функции $y=\sin x-4\cos x-4x\sin x+5$, принадлежащую промежутку $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ответ: ________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. А) Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$

14. В тетраэдре ABCD на ребрах AD, DC, AB и BC отмечены точки K, M, N и L соответственно. Точка O – точка пересечения диагоналей четырехугольника KMLN. Известно, что $\frac{OL}{OK}=\frac{3}{4};\frac{ON}{OM}=\frac{24}{25};\ DK\cdot NA-KA\cdot BN=AK\cdot NA$.

А) Докажите, что плоскость сечения KMLN делит площадь грани ABD в соотношении $4:31$

Б) Найдите отношение объемов многогранников, на которые плоскость сечения KMLN делит тетраэдр ABCD.

15. Решите неравенство: $\sqrt{7\cdot\log_{x^2-4}(x+2)+9}\ge 4-\log_{x^2-4}(x-2)$

16. Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей типа 1 и 2010 деталей типа 2. Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление двух деталей типа 1 время, за которое он мог бы изготовить одну деталь типа 2. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

17. Точка E – середина основания AD трапеции ABCD, а точка M – середина стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O.

А) Докажите, что площади треугольника COD и четырехугольника AMOE равны.

Б) Найдите отношение площади четырехугольника AMOE к площади трапеции ABCD, если BC = 2, AD = 5.

18. Найдите в градусах сумму всех значений параметра $\alpha,\left(0^0<\alpha<1000^0\right)$, для каждого из которых существует хотя бы одно число $x\in[1;2]$, удовлетворяющее уравнению

$$1+\cos^2\left(\frac{\alpha x}{2}+67{,}5^0\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x-\sin\pi x|}$$

19. Для натурального числа n обозначим через $\varphi(n)$ количество чисел, меньших или равных n и взаимно простых с n. Число n будем называть *хорошим*, если оно делится на $\varphi(n)$.

А) Может ли *хорошее* число $n>1$ быть нечетным?

Б) Чему равно наибольшее значение $\frac{n}{\varphi(n)}$, где число n *хорошее*?

В) Какое наибольшее количество членов может иметь возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из *хороших* чисел?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.