ПОДГОТОВКА К ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ.

ЗАДАНИЕ 14. КОДИРОВАНИЕ ЧИСЕЛ. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ.

Подготовила:

А.С.Безделина,

учитель математики и информатики

МБОУ «СОШ №9»

ЧТО ПРОВЕРЯЕТСЯ:

- Знание позиционных систем счисления.
- *Позиционные системы счисления.*
- *Умение строить информационные модели объектов, систем и процессов в виде алгоритмов.*

В ПРЕЗЕНТАЦИИ ИСПОЛЬЗОВАНЫ МАТЕРИАЛЫ:

- http://kpolyakov.spb.ru
- https://code-enjoy.ru/ege_po_informatike_2021_zadanie_14_chempionskaya_podgotoka/

ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ:

- принципы кодирования чисел в позиционных системах счисления
- чтобы перевести число, скажем, 12345_N, из системы счисления с основанием N в десятичную систему, нужно умножить значение каждой цифры на N в степени, равной ее разряду:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \leftarrow \text{разряды} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5_N \end{array} = 1 \cdot N^4 + 2 \cdot N^3 + 3 \cdot N^2 + 4 \cdot N^1 + 5 \cdot N^0$$

$N^0 = 1$

- последняя цифра записи числа в системе счисления с основанием N – это остаток от деления этого числа на N
- две последние цифры – это остаток от деления на N^2, и т.д.
- число 10^N записывается как единица и N нулей: $10^N = 1\underbrace{0\ldots0}_{N}$
- число 10^N-1 записывается как N девяток: $10^N - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{N}$
- число 10^N-10^M = $10^M \cdot (10^{N-M} - 1)$ записывается как N-M девяток, за которыми стоят M нулей: $10^N - 10^M = \underbrace{9\ldots9}_{N-M}\underbrace{0\ldots0}_{M}$

- число 2^N в двоичной системе записывается как единица и N нулей: $2^N = 1\underbrace{0\ldots0}_{N}{}_2$
- число 2^N-1 в двоичной системе записывается как N единиц: $2^N - 1 = \underbrace{1\ldots1}_{N}{}_2$
- число $2^N – 2^K$ при $K < N$ в двоичной системе записывается как $N–K$ единиц и K нулей: $2^N - 2^K = \underbrace{1\ldots1}_{N-K}\underbrace{0\ldots0}_{K}{}_2$
- поскольку $2^N + 2^N = 2 \cdot 2^N = 2^{N+1}$, получаем $2^N = 2^{N+1} - 2^N$, откуда следует, что $-2^N = -2^{N+1} + 2^N$
- число 3^N записывается в троичной системе как единица и N нулей: $3^N = 1\underbrace{0\ldots0}_{N}{}_3$
- число 3^N-1 записывается в троичной системе как N двоек: $3^N - 1 = \underbrace{2\ldots2}_{N}{}_3$
- число $3^N – 3^M = 3^M \cdot (3^{N-M} – 1)$ записывается в троичной системе как N-M двоек, за которыми стоят M нулей: $3^N - 3^M = \underbrace{2\ldots2}_{N-M}\underbrace{0\ldots0}_{M}{}_3$
- можно сделать аналогичные выводы для любой системы счисления с основанием a:
  – число a^N в системе счисления с основанием a записывается как единица и N нулей: $a^N = 1\underbrace{0\ldots0}_{N}{}_a$

– число a^N-1 в системе счисления с основанием a записывается как N старших цифр этой системы счисления, то есть, цифр (a-1): $a^N - 1 = \underbrace{(a-1)(a-1)\ldots(a-1)}_{N}{}_a$

– число $a^N - a^M = a^M \cdot (a^{N-M} - 1)$ записывается в системе счисления с основанием a как N-M старших цифр этой системы счисления, за которыми стоят M нулей: $a^N - a^M = \underbrace{(a-1)\ldots(a-1)}_{N-M}\underbrace{0\ldots0}_{M}{}_a$

РАССМОТРИМ ДВА ВИДА ЗАДАНИЙ:

- Прямое сложение в системе счисления;
- Определение основания.

ПРЯМОЕ СЛОЖЕНИЕ В СС

Примеры заданий:

1. Сколько единиц содержится в двоичной записи значения выражения: $4^{2020} + 2^{2017} – 15$?

2. Значение арифметического выражения: $9^8 + 3^5 – 9$ – записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

3. Сколько единиц содержится в двоичной записи значения выражения: $4^{255} + 2^{255} – 255$?

4. Значение выражения $25^5 + 5^{14} – 5$? записали в системе счисления с основанием 5. Сколько цифр 4 содержится в этой записи?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ

Задача (ЕГЭ по информатике, 2019, Москва)

Значение выражения $5^{36} + 5^{24} - 25$ записали в системе счисления с основанием 5. Сколько цифр "4" содержится в этой записи?

Решение:

Сформулируем главное правило, на которое будем опираться при решении подобного типа задач.

$$\underbrace{n^{m}}_{\text{Число в десятичной системе}} \quad \text{Соответствует} \quad \overbrace{1\underbrace{00\ldots0}_{\text{m нулей}}}^{\text{Числу в системе с основанием n}}$$

Примеры:

5^4 (в десятичной системе) - это 10000_5 (в пятеричной системе)

7^2 (в десятичной системе) - это 100_7 (в семеричной системе)

2^9 (в десятичной системе) - это 1000000000_2 (в двоичной системе)

Перепишем наше выражение, чтобы все числа были в виде степени представлены.

$$5^{36} + 5^{24} - 5^{2}$$

Посчитаем $5^{36} + 5^{24}$ в пятеричной системе столбиком, используя основное правило.

$$\begin{array}{r} 1\overbrace{0000\ldots000}^{36\text{ нулей}}{}_5 \\ + \qquad 1\overbrace{0\ldots000}^{24\text{ нуля}}{}_5 \\ \hline 1\underbrace{0\ldots}_{11\text{ нулей}}1\underbrace{0\ldots000}_{24\text{ нуля}}{}_5 \end{array}$$

Здесь всё просто: ноль прибавить ноль, будет ноль. Единица плюс ноль, будет один.

Теперь от получившегося числа нужно отнять 5^2 (100_5).

$$\begin{array}{r} 1\overbrace{0..0}^{11\text{ нулей}}1\overbrace{00\ldots000}^{24\text{ нуля}}{}_5 \\ - \qquad 100_5 \\ \hline 1\underbrace{0..00}_{12\text{ нулей}}\underbrace{44\ldots4}_{22\text{ четвёрки}}00_5 \end{array}$$

Первые два разряда посчитать легко. Ноль минус ноль, будет ноль.

Третий разряд: из нуля отнять единицу мы не можем, поэтому занимаем у более старших разрядов.

В более старших разрядах тоже нули, поэтому идём до единицы, у которой можно занять. Получается **22 четвёрки**.

Вот как было бы, если бы считали в **нашей родной десятичной** системе счисления в аналогичной ситуации.

Здесь мы считаем в **десятичной системе**, поэтому получаются **девятки**. В нашей задаче считали в **пятеричной системе**, поэтому получаются **четвёрки**.

$$\begin{array}{r} 1\overbrace{0..0}^{11\text{ нулей}}1\overbrace{00...000}^{24\text{ нуля}}{}_{10} \\ -\qquad\qquad 100_{10} \\ \hline 1\underbrace{0..00}_{12\text{ нулей}}\underbrace{99...9}_{22\text{ девятки}}00_{10} \end{array}$$

В ответе напишем 22 четвёрки.

Ответ: 22

Задача (ЕГЭ по информатике, 2020, Москва)

Значение выражения $16^8 \times 4^{20} - 4^5 - 64$ записали в системе счисления с основанием 4. Сколько цифр "3" содержится в этой записи?

Решение:

Преобразуем наше выражение. Приведём всё к 4-ам.

$$\begin{gathered} 16^8 \times 4^{20} - 4^5 - 64 = \\ = (4^2)^8 \times 4^{20} - 4^5 - 4^3 = \\ = 4^{16} \times 4^{20} - 4^5 - 4^3 = \\ = 4^{36} - 4^5 - 4^3 \end{gathered}$$

Здесь не можем применить технику устного счёта, потому что стоят два минуса. Значит, будем решать с помощью столбиков.

Сначала посчитаем $4^{36} - 4^5$.

Теперь от этого числа нужно отнять 4^3 (1000_4)

$$\begin{array}{r} \overbrace{33\ldots\ldots3}^{31\text{ тройка}}00000_4 \\ -\qquad 1000_4 \\ \hline \underbrace{33..3}_{30\text{ троек}}233000_4 \end{array}$$

Получается **32 тройки**.

В последнем вычислении нет ничего сложно. В десятичной системе вы бы легко вычислили в аналогичной ситуации.

$$\begin{array}{r} \overbrace{99\ldots\ldots9}^{31\text{ девятка}}00000_{10} \\ -\qquad 1000_{10} \\ \hline \underbrace{99..9}_{30\text{ девяток}}899000_{10} \end{array}$$

Ответ: 32

ПРОГРАММНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ. ЗАДАЧА 1.

Р-25. (**демо-2021**) Значение арифметического выражения: $49^7 + 7^{21} - 7$ – записали в системе счисления с основанием 7. Сколько цифр 6 содержится в этой записи?

- **Решение (использование программы):**

язык Python позволяет работать с большими числами, не задумываясь о том, что для их хранения требуется больше памяти, чем для «обычного» целого числа (когда значение не помещается в 4 байта, интерпретатор автоматически переходит на представление числа в виде массива с «длинной арифметикой»)

поэтому может быть написана программа, которая вычисляет нужное значение и методом деления в столбик определяет все цифры его записи в семеричной системе счисления; шестёрки считаем с помощью счётчика **count6**:

```
x = 49**7 + 7**21 - 7
count6 = 0
while x:
  if x % 7 == 6: count6 += 1
  x //= 7
print(count6)
```

Ответ: 13.

ЗАДАЧА 2.

Р-24. (**М.В. Кузнецова**). Значение арифметического выражения: $64^{10} + 2^{90} - 16$ записали в системе счисления с основанием 8. Сколько цифр «7» содержится в этой записи?

- **Решение (программа на Python, Б.С. Михлин):**

если доступна среда программирования на Python, можно написать программу, которая использует встроенную арифметику длинных чисел:

```
x = 64**10 + 2**90 - 16
print( oct(x).count('7') )
```

ответ: 18.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВАНИЯ.

Примеры заданий:

1. В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 18 записывается в виде 30. Укажите это основание.

2. Решите уравнение: $121_x + 1_{10} = 101_7$. Ответ запишите в троичной системе (основание системы счисления в ответе писать не нужно).

3. Чему равно наименьшее основание позиционной системы счисления x, при котором $225_x = 405_y$? Ответ записать в виде целого числа.

4. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 31 оканчивается на 4.

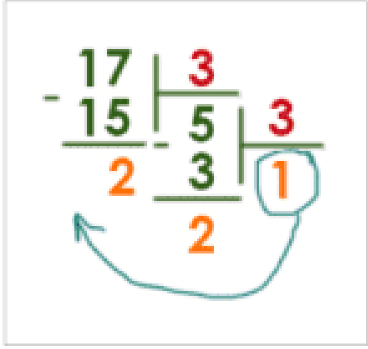
5. Найдите основание системы счисления, в которой выполнено сложение: 144 + 24 = 201.

ЗАДАЧА 1.

Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные натуральные числа, не превосходящие 17, запись которых в троичной системе счисления оканчивается на две одинаковые цифры.

Решение:

1) Переведём число **17** в троичную систему.



Получилось $\mathbf{122_3}$.

2) Теперь выпишем все числа, которые не превосходят 122_3 (Т.е. 122_3 тоже подходит!), запись которых в троичной системе счисления оканчивается на две одинаковые цифры. В троичной системе могут применяться цифры 0, 1, 2.

$\mathbf{122_3}$
122_3
111_3
100_3
22_3
11_3

Теперь переведём эти числа в десятичную систему.

$122_3 = 2 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^2 = \mathbf{17_{10}}$
$111_3 = 1 \times 3^0 + 1 \times 3^1 + 1 \times 3^2 = \mathbf{13_{10}}$
$100_3 = 0 \times 3^0 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^2 = \mathbf{9_{10}}$
$22_3 = 2 \times 3^0 + 2 \times 3^1 = \mathbf{8_{10}}$
$11_3 = 1 \times 3^0 + 1 \times 3^1 = \mathbf{4_{10}}$

Ответ: 4, 8, 9, 13, 17

ЗАДАЧА 2. (УРАВНЕНИЕ)

Чему равно наименьшее основание позиционной системы счисления x, при котором $225_x = 405_y$? Ответ записать в виде целого числа.

Решение:
Переведём каждое из чисел 225_x и 405_y в десятичную систему счисления и приравняем, т.к. эти числа равны.

$$5 \times x^0 + 2 \times x^1 + 2 \times x^2 = 5 \times y^0 + 0 \times y^1 + 4 \times y^2$$

Любое число в нулевой степени - это 1. Значит, $5 \times x^0 = 5 \times y^0 = 5$. Эти два выражения равны одному и тому же значению, следовательно, их можно убрать и слева, и справа.

$$2x + 2x^2 = 4y^2$$
$$x + x^2 = 2y^2$$
$$x(1 + x) = 2y^2$$

Получили уравнение в целых числах. Слева умножение двух последовательных чисел. Нужно начать подбирать целые числа.

При **y** = 6 :
$x (1 + x) = 2 \times 6^2 = 72$; Произведение двух последовательных чисел 8 * 9 = 72. Значит, x = 8.

Мы начали проверку с числа 6, потому что у нас в уравнении присутствуют цифра 5. Значит, система счисления может быть минимум с основанием 6.

Получается, что наименьшее значение **x** равно 8.

В подобных задач нужно знать, что числа **обязательно найдутся**, нужно их просто хорошо поискать.

Ответ: 8

Для качественной проработки 14 задания из **ЕГЭ по информатике 2021** разберём ещё некоторые задачи.

Задача 3.

В некоторой системе счисления записи десятичных чисел 66 и 40 заканчиваются на 1. Определите основание системы счисления.

Решение:
Нужно найти такое число, чтобы числа **66** и **40** при делении на это число давали остаток 1.

Т.е. искомое число должно быть делителем чисел 65 (66-1) и 39 (40-1). У числа 39 не так много делителей: 1, 3, 13, 39

Видим, что число 65 делится на 13 (65 : 13 = 5). Поэтому искомое число равно 13.

Ответ: 13

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!