100 тренировочных задач

из книги «Математика-абитуриенту» (В.В.Ткачук)

В этом документе перечислены задачи из сборника для поступающих в вузы «Математика-абитуриенту» (В.В.Ткачук). Видео с решениями задач выложены на youtube-канале «Valery Volkov». Для перехода к видеоразбору конкретной задачи нужно кликнуть по значку # перед её номером. Значок (+) после некоторых задач означает дополнительное решение задачи.

#1. Решить уравнение $\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\frac{1}{x}=5$.

#2. Решить уравнение $\log_{\cos x}(\sin x)=1$.

#3. Сколько решений имеет система $\begin{cases} x^2+y=5 \\ x+y^2=3 \end{cases}$?

#4. Какой знак имеет число $\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)$?

#5. Решить неравенство $x^3+4\geq x^2+4x$.

#6. Найти наибольшее значение функции $y=3\sin^2 x+2\cos^2 x$.

#7. Какой знак имеет число $\lg(arctg\,2)$?

#8. Решить неравенство $\frac{\sin x}{1+\cos x}\geq 0$

#9. Что больше, 3^{400} или 4^{300}?

#10. Разложить на множители выражение a^4+4b^4.

#11. Известно, что *ABCD* – трапеция с основаниями *AD* и *BC*. Пусть *O* – точка пересечения диагоналей *AC* и *BD*. Известно, что площадь треугольника *ABO* равна 2, площадь треугольника *AOD* равна 3. Найти площадь трапеции.

#12. Найти наименьшее значение выражения $|x-y|+\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$.

#13. Числа *a* и *b* иррациональны. Может ли быть рациональным число a^b?

#14. Известно, что $arctg\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\pi}{n}$, где *n* – натуральное. Найти *n*.

#15. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x+3}+1}}{x^2-5x+6}>0$.

#16. Решить уравнение $|x|^3+|x-1|^3=9$.

#17. Решить систему $\begin{cases} 2x-3|y|=1 \\ |x|+2y=4 \end{cases}$.

#18. В треугольнике ABC имеем $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$. Доказать, что $a=b$.

#19. Решить уравнение $\sqrt{x^7+1}+\sqrt{1-x^5}=8$

#20 (+). Найти максимальное значение выражения $|x|\sqrt{16-y^2}+|y|\sqrt{4-x^2}$.

#21. Доказать, что k^3+5k делится на 6 для любого $k\in\mathbb{Z}$.

#22. Известно, что $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}-\sqrt{3}$ – это целое число. Найти это число.

#23. Доказать, что $\cos 10^\circ$ иррационально.

#24. Пусть $ctg\dfrac{\alpha}{2}=m$. Найти $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

#25. Определить знак числа $\sin 2\cdot\cos 3\cdot\sin 5$.

#26. Что больше, $\dfrac{\pi}{4}$ или $arctg\dfrac{1}{4}+arctg\dfrac{5}{8}$?

#27. Что больше, $\dfrac{\pi}{4}$ или $\arcsin\dfrac{2}{3}+\arcsin\dfrac{2}{3}$?

#28. Что больше, $2^{\sqrt{3}}$ или $3^{\sqrt{2}}$?

#29. Найти $\arccos(\cos 11)$.

#30. Зная, что $\log_{14}7=a,\ \ \log_{14}5=b$, найти $\log_{175}56$.

#31. Построить график функции $y=\dfrac{1-x^2}{x^2+x-2}$.

#32. Построить график функции $\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$?

#33. Известно, что $\begin{cases}x+y=a\\ x^4+y^4=b^4\end{cases}$. Найти xy.

#34. Вычислить $2\sqrt{5,21}$ с точностью до $0,01$.

#35. Числа p и q простые, $p,q>3$. Доказать, что p^2-q^2 делится на 24.

#36. Известно, что $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=\dfrac{1}{n}$, где n – целое число.

#37. Дан треугольник ABC. Из двух вершин проведены медианы длиной 4 см и 6 см. Известно, что площадь треугольника равна 16 см^2. Найти угол между вышеупомянутыми медианами.

#38. Цифры трехзначного числа записали в обратном порядке. Доказать, что разность между исходным и полученным числом делится на 9.

#39. Найти наименьшее значение функции $y=|x-1|+|x-3|$.

#40. Решить уравнение $\sqrt[\lg x]{x}=10$.

#41. Найти наибольшее значение функции $y=\dfrac{x^2}{x^4+25}$.

#42. Решить уравнение $\cos\left(\pi x^2\right) = -\frac{1}{2}$.

#43. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, разбивает один из его катетов на отрезки длины m и n, причём $m < n$. Найти длину другого катета.

#44. Известно, что $a > 0,\ b > 0$ и $a^2 + b^2 = 7ab$. Доказать, что $\lg\frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}\left(\lg a + \lg b\right)$.

#45. Медиана треугольника совпадает с его биссектрисой. Доказать, что этот треугольник равнобедренный.

#46. Сколько диагоналей в правильном 17-угольнике?

#47. Дан треугольник *ABC*. Доказать, что $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

#48. Доказать, что число $\log_4 5$ иррационально.

#49. В треугольнике *ABC* угол *A* – прямой. Из вершины *A* проведены медиана *AM*, высота *AH* и биссектриса в треугольнике *AMH*. Доказать, что *AL* – биссектриса в треугольнике *AMH*.

#50. Все стороны выпуклого четырёхугольника меньше 7. Доказать, что его площадь строго меньше 50.

#51. Про треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AB > A_1B_1$, $AC > A_1C_1$, $BC > B_1C_1$. Верно ли, что площадь треугольника ABC непременно больше площади треугольника $A_1B_1C_1$?

#52. Сумма катетов в прямоугольном треугольнике равна 8. Может ли его гипотенуза равняться 5?

#53. При помощи циркуля и линейки построить окружность, касающуюся сторон данного угла и проходящую через заданную внутри него точку.

#54. Даны две скрещивающиеся прямые. Существуют ли две пересекающиеся прямые, каждая из которых пересекает обе скрещивающиеся?

#55. Превратить десятичную дробь $0{,}3528282828\ldots$ в обыкновенную.

#56. Найти все натуральные *x* такие, что остаток при делении 180 на *x* составляет 25% частного.

#57. Пусть *a* и *b* – натуральные числа, $\text{НОК}\left(a,b\right)$ – их наименьшее общее кратное, $\text{НОД}\left(a,b\right)$ – наибольший общий делитель. Доказать, что $\text{НОК}\left(a,b\right)\cdot\text{НОД}\left(a,b\right) = ab$.

#58. Доказать, что если две положительные несократимые дроби в сумме равны 1, то их знаменатели равны.

#59. Доказать, что удвоенная сумма квадратов двух натуральных чисел есть также сумма квадратов двух натуральных чисел.

#60. Что больше, $\log_{11} 12$, или $\log_{12} 13$?

#61. Второй член арифметической прогрессии равен 4, а десятый равен –4. Найти число членов этой прогрессии, сумма которых равна 12.

#62. В треугольнике стороны составляют геометрическую прогрессию. Доказать, что его высоты тоже составляют геометрическую прогрессию.

#63. В какой четверти лежит угол в $\sqrt{\pi}$ радиан?

#64. Найти расстояние от точки $(0,0)$ до прямой $y=\frac{3}{5}x+7$.

#65. Что больше, $tg1$ или $arctg1$?

#66. При каких α имеет место равенство $tg3\alpha = tg\alpha \cdot tg\left(60^\circ+\alpha\right)\cdot tg\left(60^\circ-\alpha\right)$?

#67. Известно, что $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найти $tg\alpha$.

#68. Найти $\sin\left(arctg\frac{1}{3}-\arccos\frac{1}{2}\right)$.

#69. Равносильны ли уравнения $\sin\left(x+45^\circ\right)=0$ и $(tgx+ctgx)(\sin x+\cos x)=0$?

#70. Найти все p и q такие, что уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни p^2 и q.

#71. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $3x^2-5x+4=0$. Найти $x_1^3x_2+x_2^3x_1$.

#72. Решить уравнение $x^2+4x-\frac{7}{x^2+4x+5}=1$.

#73. Решить уравнение $\left|2x-x^2-8\right|=x^2-1$.

#74. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$.

#75. Решить уравнение $\log_{x+6}\left(2x-\sqrt{x+6}\right)=\frac{1}{2}$.

#76. Решить уравнение $tg2x\cos 3x+\sin 3x+\sqrt{2}\sin 5x=0$.

#77. Решить систему $\begin{cases} x^2+xy=210 \\ y^2+xy=231 \end{cases}$.

#78. Решить систему $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=34 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=23-\frac{1}{\sqrt{xy}} \end{cases}$.

#79. Решить систему $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1 \end{cases}$.

#80. Исследовать систему $\begin{cases} 2x-ay=5 \\ 3y-6x=-15 \end{cases}$.

#81. Найти все a, при которых неравенство $ax^2-|x|\le 0$ верно для всех $x\le 0$.

#82. Решить неравенство $\log_x 2>\log_x 3$.

#83. Решить неравенство $\log_{\sin x}\cos x<0$.

#84. Найти область определения функции $y=\arcsin\left(\log_2 x\right)$.

#85. Доказать, что $2\sin x+5\cos x\le\sqrt{29}$.

#86. Достигает ли функция $y=\dfrac{2x^2}{x^4+1}$ своего максимума (на всей прямой) в какой-либо точке. А своего минимума?

#87. Сколько корней имеет уравнение $\lg x=\sin x$?

#88. Изобразить на плоскости множество таких точек (x,y), что $\log_y x>0$.

#89. Доказать неравенство $\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt[3]{a^3+b^3}$ для любых $a>0,\ b>0$.

#90. Доказать неравенство $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{100^2}<\dfrac{99}{100}$.

#91. При каких значениях k корни уравнения $x^2-(2k+1)x+k^2=0$ относятся как $1:4$?

#92. На плоскости дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Пусть O – его центр, а M – произвольная точка плоскости. Доказать, что

$\overrightarrow{MO}=\dfrac{1}{6}\cdot\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right)$.

#93. Доказать, что если в трапеции точка пересечения диагоналей равноудалена от боковых сторон, то трапеция равнобедренная.

#94. Что больше, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ или π?

#95. Найти высоту равнобедренной трапеции, если её площадь равна S, а острый угол между диагоналями равен 2α.

#96. Считая Землю идеальным шаром, описать множество таких точек M на Земле, что, пройдя из M 10 метров на Юг, потом 1 километр на Восток, и, наконец, 10 метров на север, вы окажетесь снова в точке M.

#97. В свежих абрикосах 80% воды, а в кураге (сушёных абрикосах) – 10% воды. Сколько кураги получится из 50 кг свежих абрикосов?

#98. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребро основания имеет длину 1, а боковое ребро SA равно 3. Найти расстояние между серединами рёбер SA и BC.

#99. Найти все $x>0$, для которых имеет место равенство $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-3}=5+\sqrt{7-x}$.

#100. Решить в целых числах уравнение $2x^2+xy-y^2-7x-4y=1$.