Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.В. Семенов

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2023 года

по **МАТЕМАТИКЕ**

Москва, 2023

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике представляет собой форму государственной итоговой аттестации, проводимой в целях определения соответствия результатов освоения обучающимися образовательных программ среднего общего образования требованиям федерального государственного образовательного стандарта. ЕГЭ проводится в соответствии с Федеральным законом от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» и Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования, утвержденным приказом Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512 (зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952).

Контрольные измерительные материалы (далее – КИМ) представляют собой стандартные варианты, соответствующие спецификации и демонстрационному варианту. Содержание КИМ ЕГЭ определяется на основе федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования (ФГОС) (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17.05.2012 № 413 с изменениями, внесенными приказами Министерства образования и науки Российской Федерации от 29.12.2014 № 1645, от 31.12.2015 № 1578, от 29.06.2017 № 613, приказами Министерства просвещения Российской Федерации от 24.09.2020 № 519, от 11.12.2020 № 712) с учетом примерной основной образовательной программы среднего общего образования (одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 28.06.2016 № 2/16з)).

Обеспечена преемственность между положениями ФГОС и федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования (приказ Минобразования Российской Федерации от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования» с изменениями, внесенными приказами Министерства образования и науки Российской Федерации от 03.06.2008 № 164, от 31.08.2009 № 320, от 19.10.2009 № 427, от 10.11.2011 № 2643, от 24.01.2012 № 39, от 31.01.2012 № 69, от 23.06.2015 № 609, от 07.06.2017 № 506).

С 2015 г. ЕГЭ по математике проводится на двух уровнях: базовом и профильном. ЕГЭ базового уровня предназначен для проверки достижения участниками экзамена основных предметных результатов, в частности способности производить бытовые расчеты и использовать математические знания для решения задач, возникающих в повседневной жизни. ЕГЭ профильного уровня предназначен для проверки освоения более широкого круга математических понятий и методов, необходимых для продолжения математического образования.

Варианты КИМ единого государственного экзамена по математике составлялись на основе спецификации контрольных измерительных материалов для проведения в 2023 г. единого государственного экзамена по математике профильного уровня и кодификатора проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования и элементов содержания для проведения единого государственного экзамена по математике.

ЕГЭ 2023 г. по математике профильного уровня

КИМ ЕГЭ 2023 г. по математике профильного уровня степени сохранили преемственность с экзаменационной моделью 2022 г. в тематике, примерном содержании и уровне сложности заданий.

Каждый вариант КИМ по математике профильного уровня состоял из двух частей и включал в себя 18 заданий, которые различались по содержанию и сложности:

– часть 1 содержала 11 заданий (задания 1–11) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби;

– часть 2 содержала 7 заданий (задания 12–18) с развернутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий).

Задания части 1 направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях и предназначены для определения математических компетентностей выпускников образовательных организаций, реализующих программы среднего (полного) общего образования на базовом уровне. Задания части 2 направлены на проверку освоения математики на профильном уровне, необходимом для применения в профессиональной деятельности и на творческом уровне, и предназначены для более точной дифференциации абитуриентов ведущих вузов.

Задания относятся к трем учебным курсам: «Алгебра и начала математического анализа» – 12 заданий; «Геометрия» – 4 задания и «Вероятность и статистика» – 2 задания.

Задания варианта КИМ ЕГЭ распределены по уровням сложности:

часть 1 содержала 6 заданий базового уровня (задания 1–3, 5–7) и 5 заданий повышенного уровня (задания 4, 8–11);

часть 2 содержала 5 заданий повышенного уровня (задания 12–16) и 2 задания высокого уровня сложности (задания 17–18).

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивалась 1 баллом. Проверка выполнения заданий 12–18 проводилась экспертами на основе разработанной системы критериев оценивания. Полное правильное решение каждого из заданий 12, 14 и 15 оценивалось 2 баллами; каждого из заданий 13 и 16 – 3 баллами; каждого из заданий 17 и 18 – 4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение экзаменационной работы – 31.

На выполнение экзаменационной работы отводилось 3 часа 55 минут (235 минут).

Минимальный пороговый первичный балл ЕГЭ по математике профильного уровня не изменился – 5; минимальный пороговый тестовый балл – 27.

В 2023 г. в модель КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня внесены следующие изменения.

Содержание КИМ 2023 г. не изменилось по сравнению с экзаменационной моделью 2022 г. В структуру части 1 КИМ внесены изменения, позволяющие участнику экзамена более эффективно организовать работу над заданиями за счет их перегруппировки по тематическим блокам. Работа начинается с заданий по геометрии (задания 1 и 2), затем следует блок заданий по элементам комбинаторики, статистике и теории вероятностей (задания 3 и 4), а затем идут задания по алгебре и началам математического анализа.

Таким образом, усилен акцент на проверку освоения элементов содержания, необходимых для успешного продолжения образования в вузах по IT, инженерным, естественнонаучным специальностям.

Число участников экзамена профильного уровня снизилось до 294,5 тыс. по сравнению с прошлым годом (около 307,5 тыс. человек в 2022 г.) за счет более осмысленного выбора выпускниками уровня экзамена в рамках завершения перехода на полноценную двухуровневую модель ЕГЭ по математике. Незначительное снижение числа участников базового экзамена отражает тенденцию, характерную для большинства регионов с развитым образовательным кластером: постепенный рост числа выпускников 9 классов, уходящих в систему СПО, а также переход части выпускников, потенциально имеющих оценки 4 и 5, из базового экзамена в профильный.

Следует также отметить снижение доли не преодолевших аттестационного порога в основном периоде экзамена, что показывает эффективность принимаемых мер по выявлению и ликвидации пробелов в знаниях экзаменуемых.

Средний тестовый балл в 2023 г. остался заметно выше среднего балла 2021 г.

Проверяемые элементы содержания, изучаемые в учебном курсе «Алгебра и начала математического анализа», традиционно осваиваются лучше, чем элементы курса «Геометрия». Результаты профильного и базового экзаменов в этом году не стали исключением. И на базовом, и на профильном уровне участники в целом продемонстрировали приемлемую технику преобразований и вычислений и решения уравнений. Тем не менее ошибки, в том числе при раскрытии скобок и простейших преобразованиях, остаются одной из основных причин неверного выполнения заданий: при правильных рассуждениях и разумном алгоритме решения экзаменуемые часто получают неверный ответ за счет ошибок в решении простейших уравнений и при выполнении арифметических действий.

В геометрии иная картина. Преподавание геометрии алгоритмизируется намного хуже, чем алгебры: количество геометрических конфигураций, возникающих даже в несложных задачах с двумя-тремя объектами, огромно. При этом определенный рост акцента в экзамене профильного уровня на важные для инженерных специальностей геометрические задания способствовал росту геометрической подготовки выпускников.

Участники профильного экзамена в 2023 г., как и прежде, демонстрируют высокую степень овладения базовыми умениями: решение уравнений различных типов, простейшие геометрические умения.

Среди заданий с полным решением наибольшее количество полных баллов, как и в прошлые годы, получено по заданиям 12 и 14. Отдельно следует уровень выполнения практико-ориентированных заданий, связанных с применением математики, что показывает успешность мер по формированию функциональной грамотности; в частности, заметен успех в выполнении заданий на применение математики при решении задач с экономическим содержанием.

Задачи по стереометрии (13), планиметрии (16) и уравнение с параметром (17) остаются наиболее сложными задачами части 2 профильного ЕГЭ по математике. Это говорит о том, что необходимо продолжать работу по развитию геометрической составляющей школьной математики, в том числе по формированию наглядных геометрических представлений в основной школе, которые станут базой для изучения стереометрии, правильность планируемых мер по детализации требований ФГОС в части геометрии.

К сожалению, непреодоленной остается серьезная проблема: перекос в математической подготовке школьников в сторону решения большого количества тренировочных работ по специализированным сборникам или вариантам прошлых лет. Давая своим ученикам клонированные варианты один за другим, учитель добивается, как ему кажется, безусловного и безукоризненного выполнения работ почти всеми учащимися класса. У него создается ложное мнение, что школьники готовы к сдаче ЕГЭ, и похожее впечатление возникает у самих школьников и их родителей. Проблема в том, что, решая экзаменационные задачи предыдущих лет, школьник готовится к прошлогоднему экзамену, а не к предстоящему. Достаточно ярко это проявилось в снижении процента выполнения экономической задачи, которая при эквивалентной сложности и внешней схожести не решалась буквальным повторением хода решения прошлогодней задачи.

Ниже содержится краткий обзор результатов выполнения типичных заданий профильного и базового ЕГЭ по математике в 2023 г. с указанием вероятных причин низкой результативности ряда заданий.

Для анализа выполнения заданий КИМ ЕГЭ использованы иллюстрации с заданиями вариантов 2023 г. Каждый из использованных для анализа вариантов выполняли не менее 8000 участников экзамена из разных регионов. Выборку можно считать репрезентативной.

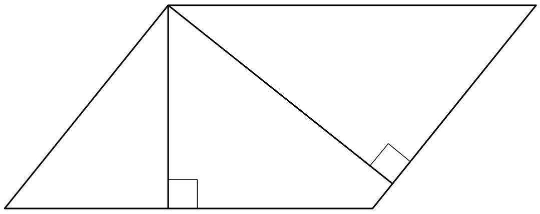
Раздел «Геометрия»

Рассмотрим задания 1 и 2 с кратким ответом базового уровня.

Задание 1 – геометрическая задача на нахождение геометрических величин.

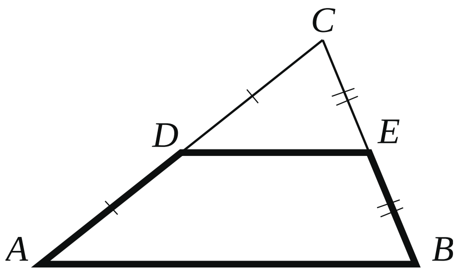
Пример 1

Стороны параллелограмма равны 18 и 20. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 10. Найдите длину высоты, опущенной на бóльшую сторону параллелограмма.



Пример 2

Площадь треугольника ABC равна 60, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



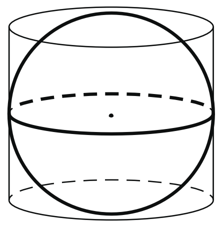
Комментарий

Задания выполнялись на уровне выше 72 %, что свидетельствует об успешном владении базовыми геометрическими умениями большинством участников экзамена. В примере 1 на умение вычислять площадь параллелограмма распространенной ошибкой являлось установление прямой пропорциональной зависимости между стороной параллелограмма и высотой, проведенной к ней. В примере 2 на умение находить площади подобных треугольников из-за неразвитости геометрических представлений значительное число участников экзамена посчитало, что средняя линия отсекает треугольник, площадь которого равна половине площади исходного. Для выполнения геометрических задач требуется не формальное, а развитое наглядное представление об отношениях площадей подобных фигур.

Задание 2 – геометрическая задача на нахождение геометрических величин.

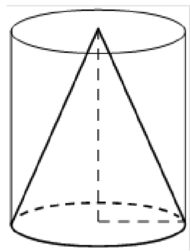
Пример 1

Цилиндр, объём которого равен 18, описан около шара. Найдите объём шара.



Пример 2

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 30. Найдите объём конуса.



Комментарий

Задание выполнили более 60 % участников. Типичная ошибка – неверный учет масштаба. Из-за неразвитости пространственных представлений и незнания формул объемов тел значительное число участников экзамена умножали на 1/2; они не учли, что если радиус вдвое больше, то площадь основания больше вчетверо. Для выполнения геометрических задач требуется не формальное, а развитое наглядное представление об отношениях объемов круглых тел.

Раздел «Вероятность и статистика»

Рассмотрим задание 3 с кратким ответом базового уровня и задание 4 с кратким ответом повышенного уровня.

Задание 3 – задача по теории вероятностей на прямое вычисление вероятности.

Пример 1

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 10 спортсменов из Испании и 6 спортсменов из Бразилии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что одиннадцатым будет выступать спортсмен из Испании.

Пример 2

На конференцию приехали учёные из трёх стран: 9 из Португалии, 7 из Финляндии и 4 из Болгарии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что седьмым окажется доклад учёного из Португалии.

Задание 4 – задача по теории вероятностей повышенного уровня.

Пример 1

В коробке 6 синих, 9 красных и 10 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

Пример 2

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в три первые мишени и не попадёт в последнюю.

Комментарий

Задание 3 выполнило подавляющее большинство участников экзамена, задание 4 выполнили более 70 % участников экзамена, что говорит об успешном овладении выпускниками умениями анализа простейших вероятностных моделей, готовности школы к реализации обновленного ФГОС, предусматривающего систематическое изучение вероятности, и статистика в рамках специально выделенного часа с 7 по 11 класс.

Типичные ошибки при выполнении задания 4 показывают важность акцента при изучении курса вероятности и статистики именно на развитие умения анализировать вероятностную модель, а не формально заучивать правила и проводить вычисления по формулам.

Раздел «Алгебра и начала математического анализа»

Задание 5 проверяет умение решать показательные уравнения, приводящиеся к линейным.

Пример 1

Найдите корень уравнения $4^{x-7}=\frac{1}{64}$.

Пример 2

Найдите корень уравнения $5^{2-x}=125$.

Комментарий

Задание выполнило подавляющее большинство участников экзамена профильного уровня, что говорит о достаточно высоком владении базовыми алгебраическими умениями участниками экзамена профильного уровня. Следует обратить внимание на необходимость проверки ответа подстановкой, а также избегать устного выполнения действий, особенно с отрицательными числами при решении экзаменационных заданий.

Задание 6 – нахождение значения логарифмического выражения.

Пример

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_9 28}{\log_9 7}+\log_7\dfrac{7}{4}$.

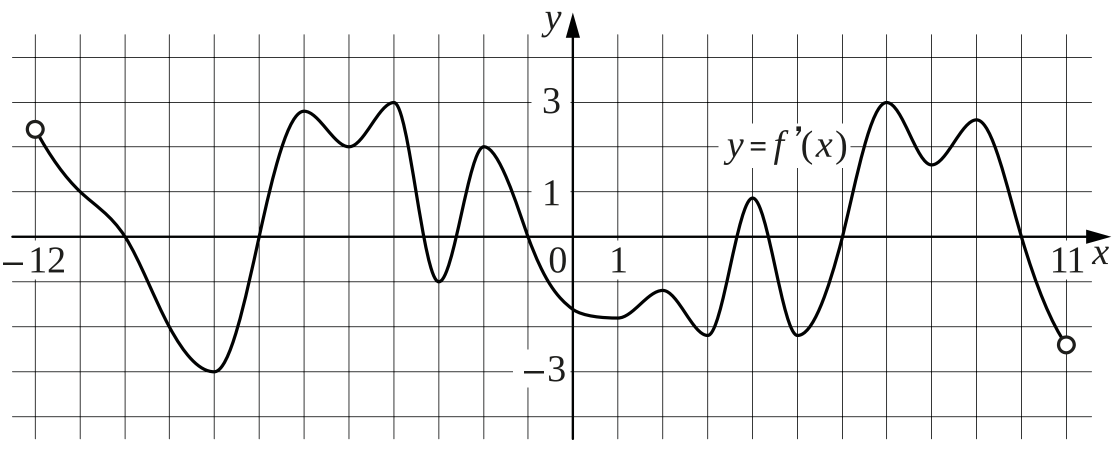
Комментарий

Задание выполнило более половины участников. Анализ веера ответов показывает, что вызывает сложности переход к новому основанию. Следует уделять больше внимания отработке этой важной темы.

Задание 7 – поиск точек экстремума функции по изображению графика производной этой функции.

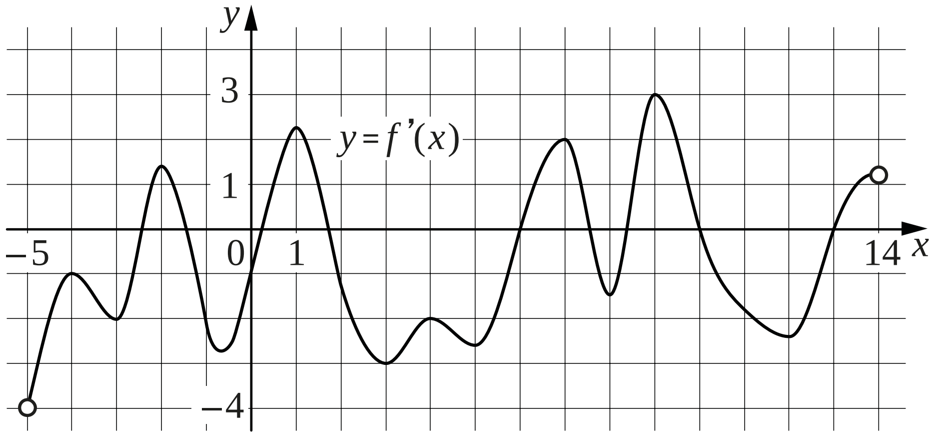
Пример 1

На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12;11)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-11;5]$.



Пример 2

На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;14)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4;9]$.



Комментарий

Задание выполнило более половины участников экзамена. Выполнение данного задания стабилизировалось после роста в течение многих лет. Указанный уровень выполнения все еще не соответствует стоящим задачам по подготовке абитуриентов массовых технических вузов. Следует усилить акцент в изучении курса начала анализа на наглядные, смысловые вопросы, понимание сути производной, анализ графиков функций, не сводя курс к рутинному вычислению по формулам.

Задание 8 – вычисление по формуле.

Пример 1

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 20 см до 40 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 см до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно разместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Пример 2

Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 295$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе такой же тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f (в Гц) больше первого: она зависит от скорости тепловоза v (в м/с) и изменяется по закону $f(v) = \dfrac{f_0}{1 - \dfrac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они различаются не менее чем на 5 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с. Ответ дайте в м/с.

Комментарий

Задание выполнило более половины участников экзамена. Сложности вызывают чтение условия задачи, составление математической модели (что видно по заметной доле не приступивших к заданию) и алгебраические преобразования. Это задание особенно четко показывает готовность к продолжению образования в массовых технических вузах, следует уделять особое внимание отработке указанных навыков. Также следует отметить, что неотработанность умений выполнять задания такого типа является одним из факторов, затрудняющих изучение школьником курса физики в школе.

Задание 9 – текстовая задача на работу, на движение.

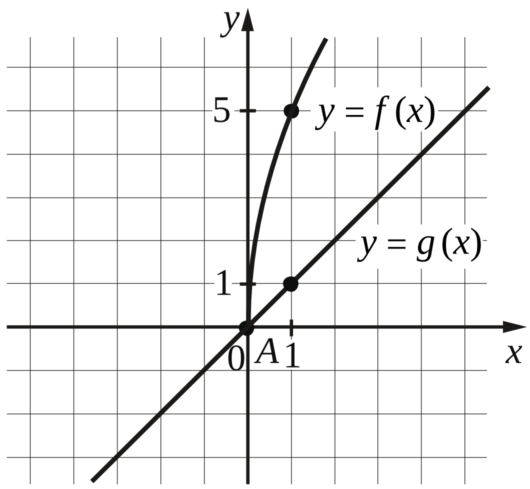
Пример 1
Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 104 литра она заполняет на 5 минут дольше, чем вторая труба?

Пример 2
Два велосипедиста одновременно отправились в 220-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 9 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 9 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

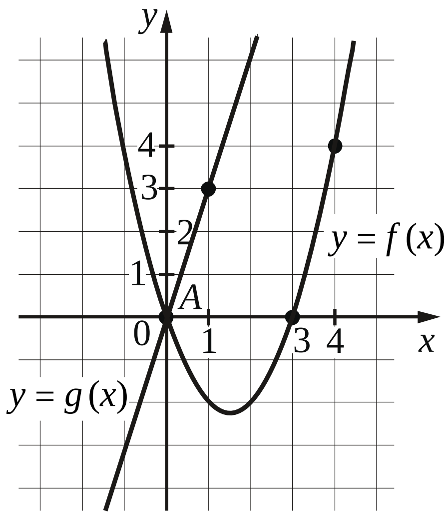
Комментарий
Задание выполнило более половины участников экзамена. Уровень выполнения задания, к сожалению, стабилизировался и показывает большой ресурс роста результатов, которые можно достичь путем систематической работы по решению текстовых задач как на протяжении всего обучения в школе, так и на завершающем этапе повторения. Типичные ошибки связаны с неумением составить математическую модель, вычислительные ошибки составляют гораздо меньшую долю.

Задание 10 – выполнение действий с функциями.

Пример 1
На рисунке изображены графики функций видов $f(x)=a\sqrt{x}$ и $g(x)=kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Пример 2
На рисунке изображены графики функций видов $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Комментарий

Задание выполнило более половины участников экзамена. Задание такого типа было впервые включено в КИМ ЕГЭ по математике в 2022 г. Результат выполнения данного задания говорит о сформированности в значительной степени у учащихся умения работать с графиками элементарных функций и владении умениями характеризовать поведение функций, использовать полученные знания для описания и анализа реальных зависимостей. Но при этом заметна доля участников экзамена профильного уровня, которые, по-видимому, изучали курс алгебры формально, концентрируясь на выполнении технических преобразований, и даже не приступили к данному заданию. Следует уделять, как отмечено выше, больше внимания работе с функциями, их графиками.

Задание 11 – задача на нахождение наибольшего или наименьшего значения функции с использованием производной.

Пример 1

Найдите наибольшее значение функции $y = 7 + 12x - 4x\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 12]$.

Пример 2

Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 6x + 3$ на отрезке $[0; 40]$.

Комментарий

Задание выполнило около половины участников экзамена. Для нахождения точки минимума функции нужно было найти производную функции, приравнять производную к нулю, решить простейшее иррациональное уравнение, продолжить исследование, чтобы найти точку минимума. Можно предположить, что сложность задания связана с нахождением производной функции $f(x) = x\sqrt{x}$ и недостаточной отработкой преобразований аналитической записи функции перед началом исследования.

Задание 12 – тригонометрическое уравнение. Задание повышенного уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 2.

Пример

а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right].$

Комментарий

Задание выполняет минимум на 1 балл половина участников. Следует отметить важность развития в курсе математики не только умения находить верный ответ, но и умения полно, обоснованно излагать решение задачи. К сожалению, в данной задаче заметное число участников экзамена пропускают шаги в решении и обосновании, иногда приводя просто ответ, который им кажется очевидным из рисунка, что зачастую приводит к ошибке в ответе или при верном ответе к неполучению балла из-за отсутствия обоснованного решения. При этом путь решения может быть любым, математически корректным и обоснованным, содержащим все ключевые элементы решения, например при выполнении пункта б), с помощью как окружности, так и прямой или неравенств.

Задание 13 – геометрическая задача (стереометрия). Задание повышенного уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 3.

Пример

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2.$ Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 1:2,$ а точка K — середина ребра $DD_1.$

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью $MKC,$ если $\angle MKC = 90°,$ $\angle ADC = 60°.$

Комментарий

Заметный рост выполнения геометрических заданий части 1 экзаменационной работы создает хорошие предпосылки для роста выполнения геометрических заданий части 2, в том числе стереометрического задания. Основные сложности в выполнении этого задания и высокий процент не приступивших к выполнению этого задания связаны с фактическим игнорированием в значительном количестве школ формирования таких важных умений, как решение двух–четырехходовых стереометрических задач, приведение доказательств стереометрических утверждений. Большой разрыв результатов решения задания по стереометрии части 2 и этих заданий части 1 говорит о том, что на уроках ограничиваются лишь решением простейших наглядных и вычислительных заданий. Следование ФГОС и ФОП среднего общего образования приведет в двух-трехлетней перспективе к существенному росту выполнения таких заданий. Наиболее трудными, как правило, являются логические построения, связанные с доказательством от противного. Отмечая важность развития умений выполнять такие заданий для успешного продолжения образования не только по инженерным, но и по IT-специальностям, следует обратить внимание учителей на необходимость усиления внимание к курсу стереометрии, в особенности к выработке умения решать задачи различными методами, как геометрическими, так и аналитическими.

Задание 14 – решение неравенства. Задание повышенного уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 2.

Пример

Решите неравенство $\log_8\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\geq\log_2\left(x^2-1\right)-5.$

Комментарий

Верное выполнение заданий данного типа требует развитых умений работы с алгебраическими выражениями, грамотной работы с переменными. Как и в других заданиях с развернутым ответом, участник экзамена должен привести полный, математически корректный и обоснованный путь решения. К сожалению, ряд учителей вместо развития навыков решения неравенств обучает учеников определенным шаблонным путям решения, ошибочно полагая, что только такие решения оцениваются как верные. Это приводит к тому, что заметное число участников экзамена пытается применять некорректные в конкретной задаче подходы к решению и это влечет ошибки в ответах, некорректности в решении, а в ряде случаев невозможность завершить решение задачи. Следует начинать повторение с простейших заданий на решение неравенств и, отработав базовые приемы, переходить к решению разнообразных заданий уровня ЕГЭ, в том числе заданий прошлых лет, опубликованных на сайте ФИПИ. При проверке решений школьников на уроке учителю следует проверять именно математическую корректность и обоснованность решения, а не только совпадение ответа или, напротив, совпадение решения с тем или иным «эталоном».

Задание 15 – практико-ориентированная задача. Задание повышенного уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 2.

Пример

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

Комментарий

Задание имеет практико-ориентированный характер и позволяет участнику экзамена продемонстрировать умения анализировать условие задачи, составлять математическую модель и находить обоснованный ответ, используя изученные математические методы. К сожалению, ряд учителей, вместо развития умения составлять математическую модель «натаскивает» учеников на конкретные алгоритмы решения заданий прошлых лет или даже начинает рассказывать об элементах экономической теории. Следует отметить, что все необходимые сведения приведены в условии задачи, никаких дополнительных знаний для решения задачи не требуется. Основной причиной, по которой участник экзамена не приступает к решению задачи или неверно составляет математическую модель, является как раз попытка безуспешно применять буквально алгоритм решения задания прошлого года. Важно отметить, что подавляющее большинство участников экзамена, нашедших путь решения, верно доводят его до конца, что показывает рост математической культуры выпускников.

Задание 16 – геометрическая задача (планиметрия). Задание повышенного уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 3.

Пример

Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Через точку O провели прямую, параллельную основаниям BC и AD.

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM : MB = 1 : 2$.

Комментарий

Как отмечено выше, заметный рост выполнения геометрических заданий части 1 экзамена создает хорошие предпосылки для роста выполнения геометрических заданий части 2. Однако, к сожалению, все еще во многих школах уделяется недостаточное внимание преподаванию геометрии в основной школе, и если ликвидировать пробелы при решении задач базового уровня сложности и анализе простейших геометрических конструкций за время повторения реально, то сформировать культуру рассуждений и доказательств, необходимых для полноценного решения многоходовой задачи, крайне тяжело. Введение в рамках обновленного ФГОС углубленного курса геометрии в основной школе, обновление содержания курса геометрии с акцентом на развитие геометрических представлений, геометрической интуиции, культуре рассуждений и доказательств создают хорошую базу для роста геометрической подготовки абитуриентов технических вузов и роста процента выполнения данного задания.

Задание 17 – уравнение с параметром. Задание высокого уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 4.

Пример

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2 - 5x - y + 3\right) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Комментарий

Заметный рост выполнения задания на полный балл при стабильной доле получивших ненулевой балл показывает тенденцию роста математической культуры выпускников школ, позволяющей довести до конца решение данной задачи высокого уровня сложности. При этом остается большой потенциал роста результатов этой задачи, для чего требуется систематическое формирование соответствующих умений начиная с основной школы. Не следует пропускать изучение простейших задач с параметром как при изучении линейной и квадратичной функций в основной школе, так и при итоговом повторении.

Задание 18 – целочисленная арифметика, перебор вариантов, доказательство. Задание высокого уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 4.

Пример

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Комментарий

Задание позволяет участнику экзамена продемонстрировать уровень сформированности математической культуры, умение применять изученные методы в нестандартной ситуации решения задач, в которой главным компонентом является не преодоление технических сложностей, а поиск пути решения. Задача имеет исследовательский характер, требуя подчас проверки подтверждения или опровержения гипотез. На ненулевой балл выполнило более половины участников экзамена, на полный балл – очень небольшой процент. Задача имеет очень высокий потенциал роста, для ее выполнения важны регулярное решение нетиповых заданий, акцент на развитие мышления, логики, а не только развитие технических навыков. Наиболее эффективно формировать такие навыки начиная с 5–6 класса. Первый пункт задачи имеет конструктивный характер и доступен многим участникам экзамена, поэтому последние годы задача стала приобретать популярность не только у наиболее сильной группы, но и у выпускников с недостаточной общей алгебраической подготовкой, но развитым логическим мышлением. Здесь важно, чтобы учитель верно сориентировал, показал на примерах, что первый пункт не требует специальных знаний – достаточно умения понять условие задачи, небольшой сообразительности и минимального терпения, чтобы обнаружить нужную математическую конструкцию. В старших классах и во время итогового повторения также необходимо решение разнообразных по тематике несложных нетиповых задач, которые имеются в достаточном количестве в банке ФИПИ, открытых банков массовых олимпиад (в том числе школьного этапа ВсОШ), обновленных школьных учебников, позволяющих интегрировать основное и дополнительное образования.

Современная модель ЕГЭ по математике профильного уровня выделяет по результатам экзамена пять групп участников в соответствии с их уровнем предметной подготовки (табл. 1). Такая группировка обусловлена качественными различиями в уровне подготовки участников экзамена. Разумеется, группировка условна, а границы групп нечеткие.

Табл. 1. Группы по уровню подготовки (профильный уровень)

Группа	1 (мин.)	2 (базовый)	3 (базовый)	4 (повыш.)	5 (высокий)
Границы первичных баллов	0–4	5–7	8–10	11–19	20–31
Границы тестовых баллов	0–22	27–40	46–58	64–80	82–100
Процент участников	8,8	17,5	23,4	45,1	5,2

Группа 1. В большинстве своем это школьники, слабо мотивированные к изучению математики. Их участие в профильном экзамене часто нецелесообразно и вызвано ошибочным выбором уровня экзамена.

Группа 2. Основа группы – абитуриенты вузов, выбирающие гуманитарные или социально-психологические специальности, но вынужденные сдавать профильный экзамен в связи с требованиями вуза.

Группа 3 – участники, успешно освоившие базовый курс математики и способные обучаться на технических специальностях большинства вузов, не предъявляющих высоких требований к математическим знаниям абитуриентов.

Группа 4 – выпускники, имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения образования по большинству специальностей, требующих повышенной и высокой математической компетентности.

Группа 5 – участники с отличной подготовкой, которые могут продолжать обучение при самых высоких требованиях к математической подготовке на фундаментальных естественнонаучных и математических специальностях вузов.

Доля участников из группы 1 значительна. Это означает, что, даже в условиях профильной модели ЕГЭ и уменьшения общего числа участников, в экзамене профильного уровня участвует значительное число школьников, не готовых преодолеть минимальный порог.

Участники из группы 1, как правило, ограничиваются 9–11 заданиями с кратким ответом и практически не приступают к задачам, требующим развернутых ответов (менее 0,3 % тех, кто набрал до 20 ТБ, выполнили каждое из заданий 12–17 хотя бы на 1 балл; в задании 18 получили 1 или 2 балла около 7 %). Геометрические задачи, задачи на понимание методов математического анализа и свойств графиков выполняются участниками из этой группы плохо. В большинстве своем это школьники, слабо мотивированные к изучению математики. Их участие в профильном экзамене часто нецелесообразно.

Группу 2 можно характеризовать как тех, кто осваивал базовый курс, но не приобрел устойчивых навыков. Это не позволяет им продолжать образование по технической специальности. Многочисленность группы 2 на профильном ЕГЭ по математике часто объясняется противоречивыми требованиями ряда вузов к абитуриентам: это обязательный профильный экзамен, результаты которого учитываются в сумме баллов, но при этом допускаются относительно невысокие требования к математической подготовке.

В отличие от группы 1, участники из группы 2 чаще принимаются за решение заданий части 2, о чем свидетельствуют, например, результаты решения тригонометрического уравнения (около 12 % тех, кто набрал от 21 до 40 ТБ, а это преимущественно участники из группы 2, выполнили задание 12 хотя бы на 1 балл, а в задании 18 получили 1 или 2 балла около 25 %). Наличие вычислительных навыков позволяет им относительно успешно справиться с частью 1 экзамена, но, начиная с задания 13 (стереометрия), их результаты почти не отличаются от результатов группы 1, т.е. близки к нулевым значениям.

Группа 3 выполняет задания 1–12, как правило, с небольшим количеством ошибок вычислительного характера. В эту группу может перейти заметное число сдавших на отлично экзамен базового уровня.

Группа 4, продолжающая укреплять свои позиции в генеральной совокупности участников экзамена, составляет основу абитуриентов и успешных студентов технических вузов. Именно эту группу следует считать целевой при составлении части 2 профильного ЕГЭ. Важную роль в росте доли участников данной группы играет своевременная профориентационная работа со школьниками, в том числе в 9 и 10 классах, с тем чтобы большее число обучающихся выбирали профильный курс математики, хорошо его осваивали и ориентировались на дальнейшей поступление в вузы на современные перспективные специальности.

Численный состав группы 5 все же можно считать стабильным по результатам нескольких лет. Это выпускники, которые могут продолжать обучение при самых высоких требованиях к математической подготовке на технических и на фундаментальных естественнонаучных и математических специальностях вузов. Но даже в этой, наиболее подготовленной, группе требуется внимание повышению качества геометрической подготовки. Следует также отметить, что ряд участников данной группы имеют внеконкурсное поступление или существенные льготы при поступлении как победители и призеры Всероссийской олимпиады школьников и олимпиад, входящих в Перечень Минобрнауки.

В таблице 2 показано распределение процентов выполнения заданий по группам баллов. Разбиение на группы отличается от разбиения в табл. 1[1]. Проценты округлены до десятых долей.

[1] Приведены традиционные группы участников экзамена: не преодолевшие минимального балла, от минимального балла до 60, 61–80, 81–100 т.б.

Табл. 2. Выполнение заданий по группам (разбиение ФЦТ), проценты (профильный уровень)

Задание / балл	Средний процент выполнения	Группа 1, 0–4 ПБ	Группа 2, 5–10 ПБ	Группа 3, 11–19 ПБ	Группа 4, 20–31 ПБ
1 / 1	78,7	28,2	70,9	92,8	98,9
2 / 1	71,5	22,2	60,9	87,5	96,7
3 / 1	92,8	66,6	92,0	97,7	99,0
4 / 1	69,1	12,6	58,7	86,4	93,6
5 / 1	96,7	78,0	97,3	99,4	99,7
6 / 1	78,9	22,2	69,8	95,5	99,2
7 / 1	74,7	24,1	63,1	92,0	97,8
8 / 1	72,1	13,9	60,4	90,6	97,8
9 / 1	71,1	10,7	57,9	91,3	97,5
10 / 1	71,6	8,7	55,6	94,8	99,1
11 / 1	62,5	4,3	42,4	87,6	96,8
12 / 1	6,2	0,23	5,3	8,4	2,9
12 / 2	40,9	0,07	6,4	73,7	95,3
13 / 1	4,1	0,01	0,2	4,8	34,3
13 / 2	0,14	0	0	0,07	2,1
13 / 3	0,66	0	0	0,23	10,7
14 / 1	1,1	0,01	0,2	2,0	2,1
14 / 2	17,2	0,01	0,3	27,9	86,3
15 / 1	4,3	0	0,5	7,6	13,7
15 / 2	8,4	0	0,1	11,2	63,2
16 / 1	6,8	0,02	0,4	9,4	45,7
16 / 2	0,17	0	0	0,15	2,2
16 / 3	0,83	0	0	0,25	13,9
17 / 1	6,3	0,02	0,37	11,9	14,3
17 / 2	2,0	0	0,3	2,9	12,7
17 / 3	0,6	0	0	0,6	6,6
17 / 4	3,7	0	0	1,4	57,4
18 / 1	30,2	6,7	21,5	42,2	32,4
18 / 2	11,6	0,3	3,5	17,6	42,0
18 / 3	0,7	0	0,1	1,1	3,2
18 / 4	1,7	0	0,1	1,7	15,9

Выделяется задание 18, которое на 1 балл выполняет около 7 % участников из группы 1 и около 11 % участников из группы 2. Похожие результаты выполнения последнего задания наблюдались и в прошлые годы. Это говорит о том, что в этих группах есть участники, обладающие математической культурой, достаточно высокой для того, чтобы разобраться в тексте абстрактной математической задачи, экспериментировать с натуральными числами или целыми последовательностями и найти пример, удовлетворяющий условию задачи. При этом эти участники не выполняют, казалось бы, простейших алгоритмов решения тригонометрических уравнений. Таким образом, проявляется существование заметной доли выпускников школ, которые не в полной мере осваивают основную программу по математике, несмотря на то что обладают более чем достаточными для этого математическими способностями. Следует отметить, что данное задание показывает также степень развития математической культуры, умения найти путь решения задачи в новой ситуации, навыков логического мышления; это является одним из основных личностных результатов математического образования профильного уровня.

Важно отметить, что в 2023 г. сохраняется заметный разрыв между уровнями алгебраической и геометрической подготовки выпускников. Наиболее ярко сравнительный анализ успешности освоения курса алгебры и курса геометрии виден на результатах наиболее успешной группы 4. При этом достаточно ограничиться заданиями 12–18 части 2, поскольку задания части 1 участники из этой группы выполняют практически полностью.

Если задания 12, 14, 15, 17 и 18 на полный балл выполняют соответственно 95,4 %, 86,3 %, 63,2 %, 57,5 % и 15,9 % участников из группы 4, то задания 13 и 16 на полный балл выполняют лишь соответственно 10,6 % и 13,9 % участников. Основная причина в том, что даже у наиболее подготовленных школьников геометрия вызывает опасения, в то время как главным ресурсом на экзамене является время. Конечно, задача 16 требует немало времени на выполнение и анализ чертежа, поиск ключевых элементов конфигурации, решение множества вспомогательных подзадач. Однако даже стандартная стереометрическая задача 13 у хорошо подготовленного и мотивированного участника экзамена занимает больше времени, чем, к примеру, задача 15, которая требует объективно намного большего объема обработки информации, иногда составления таблицы, применения нескольких алгоритмов и арифметических вычислений с многозначными числами. Можно предположить, что участник экзамена, выполняющий задание 15 и пропускающий задание 13 или выполняющий его с ошибкой, не видит стандартных алгоритмов, которые он мог освоить на уроках. При хорошей подготовке решение задачи 13 занимает в 1,5–2 раза меньше времени, чем задача 15, и не больше, чем задача 14.

Часто наиболее подготовленные участники, которые заранее планируют время и выстраивают тактику решения задач на экзамене, относят решение стереометрической задачи на оставшееся время. Отработка стандартных алгоритмов построения сечения, нахождения элементов призмы, правильной пирамиды по-прежнему остается неиспользованным ресурсом повышения уровня математической подготовки выпускников.

В прошлом году в наиболее многочисленной группе 2 явно выделялась «граница успешности», совпадающая с этой «границей» между заданиями с кратким и развернутым ответами. В этом году эта «граница» обозначена еще четче. Выполнение заданий 1–11 в группе 2 на уровне не менее чем 42,4 %. Задание 12 – наиболее успешное задание части 2 – выполнено лишь на уровне 11,6 %. Возникает гипотеза, что значительная часть, если не большинство участников из этой группы, попадают в эту группу лишь потому, что не обучены математической речи в той степени, которая необходима для ясного изложения мыслей при выполнении заданий с развернутым ответом. При этом уровень математического мышления, техника математических преобразований и вычислений у них могут быть достаточно развиты. Можно предположить также, что проблема кроется в злоупотреблении письменными видами работы, тестами, краткими ответами; при этом школьники имеют мало практики в устных ответах, развернутых письменных математических сочинениях. Такой школьник может решить уравнение или неравенство, понимает математический смысл задачи, но в силу отсутствия практики не может ясно и последовательно записать решение.

ЕГЭ 2023 г. по математике базового уровня

Модель ЕГЭ по математике базового уровня предназначена для государственной итоговой аттестации выпускников, не планирующих продолжения образования в профессиях, предъявляющих специальные требования к уровню математической подготовки. Так как в настоящее время существенно возрастает роль общематематической подготовки в повседневной жизни, в массовых профессиях, в модели ЕГЭ по математике базового уровня усилены акценты на контроль способности применять полученные знания на практике, развитие логического мышления, умение работать с информацией.

КИМ ЕГЭ 2023 г. по математике базового уровня сохранили преемственность с экзаменационной моделью 2022 г. в тематике, примерном содержании и уровне сложности заданий.

Экзаменационная работа включала в себя 21 задание с кратким ответом базового уровня сложности. Все задания, как и прежде, предполагали краткий числовой ответ, множественный выбор из данного перечня вариантов либо установление соответствия между двумя характеристиками процесса или объектов и направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях.

Задания относятся к учебным курсам: «Математика» и «Алгебра и начала математического анализа» – 15 заданий; «Геометрия» – 5 заданий и «Вероятность и статистика» – 1 задание.

Правильное выполнение каждого из заданий 1–21 оценивалось 1 баллом. Максимальный первичный балл за выполнение экзаменационной работы – 21.

На выполнение экзаменационной работы отводилось 3 часа (180 минут).

Проверка логических навыков включена во все задания и особенно проявляется в заданиях 18, 19, 21.

Традиционно задачи 19 и 21 предполагают не столько применение известных фактов или формул, сколько числовое конструирование (предъявите число, обладающее определенными свойствами) и математическое рассуждение.

Задание 20 является классической практико-ориентированной задачей на движение или совместную работу, заданной текстовым условием.

Минимальный балл ЕГЭ по математике базового уровня в 2023 г. остался неизменным по сравнению с 2022 г. и составляет 7 первичных баллов (3 тестовых балла).

Таким образом, ЕГЭ базового и профильного уровней образует стройную систему итоговой аттестации за курс средней школы, состоящую из двух четко обозначенных комплексов требований в соответствии со ФГОС. Система базовых требований подразумевает возможность подтвердить минимальное владение математическими знаниями и умениями, достаточными для применения в повседневной жизни. Система профильных требований включает в себя проверку знаний и умений, необходимых для продолжения образования в высшей школе по специальностям, требующим хорошей математической подготовки.

Содержание КИМ экзаменационных вариантов не изменилась по сравнению с 2022 г.

В структуру КИМ внесены изменения, позволяющие участнику экзамена более эффективно организовать работу над заданиями за счет перегруппировки заданий по тематическим блокам. В начале работы собраны практико-ориентированные задания, позволяющие продемонстрировать умение применять полученные знания из различных разделов математики при решении практических задач, затем следуют блоки заданий по геометрии, алгебре и началам математического анализа.

В 2023 г. произошел небольшой спад числа участников (в 2023 г. – 351,6 тыс. человек; в 2022 г. – 360,6 тыс. человек), обусловленный как переходом части потенциальных участников ЕГЭ базового уровня в систему СПО, так и переходом части выпускников, потенциально имеющих оценки 4 и 5 на экзамене базового уровня, на ЕГЭ профильного уровня. Это обусловило некоторое снижение доли получивших оценку 5.

Важно отметить снижение доли не преодолевших аттестационного порога (в 2023 г. – 2,5 %, в 2022 г. – 3,9 %), что показывает эффективность системы выявления и ликвидации пробелов в знаниях, а также системной методической поддержки школ с низкими образовательными результатами на федеральном и региональном уровнях.

Для анализа использованы иллюстрации с заданиями вариантов 2023 г. Каждый из использованных для анализа вариантов выполняли не менее 6000 участников экзамена из разных регионов. Выборку можно считать репрезентативной. Варианты базового экзамена полностью собираются из банка заданий. Наличие открытого банка заданий позволяет учителю использовать эти задания как при обучении, так и при организации повторения.

Задание 1 – текстовая задача практического содержания.

Пример 1
Шоколадка стоит 20 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок). Какое наибольшее число шоколадок можно получить на 150 рублей в воскресенье?

Пример 2
Стоимость проездного билета на месяц составляет 650 рублей, а стоимость билета на одну поездку 28 рублей. Аня купила проездной и сделала за месяц 45 поездок. На сколько рублей больше она бы потратила, если бы покупала билеты на одну поездку?

Комментарий

Данное задание показало, что более 15 % участников экзамена имеют сложности с построением простейшей математической модели и недостаточно сформированные арифметические навыки и как следствие заведомо имеют сложности в освоении не только курса математики, но и других естественных наук. Необходимо своевременно выявлять указанные пробелы и ликвидировать их путем систематических упражнений.

Задание 2 – практическая задача на проверку сформированности у выпускника представлений о величине – массе, времени, длине.

Пример 1
Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) масса молекулы водорода	1) 500 мг
Б) масса Земли	2) $5{,}9726 \cdot 10^{24}$ кг
В) масса активного вещества в таблетке	3) $3{,}3464 \cdot 10^{-27}$ кг
Г) масса взрослого слона	4) 5 т

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Пример 2

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) расстояние от Земли до Луны	1) 385 000 км
Б) расстояние от Москвы до Сочи	2) 1600 км
В) расстояние между соседними троллейбусными остановками	3) 300 м
Г) диаметр монеты	4) 20 мм

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

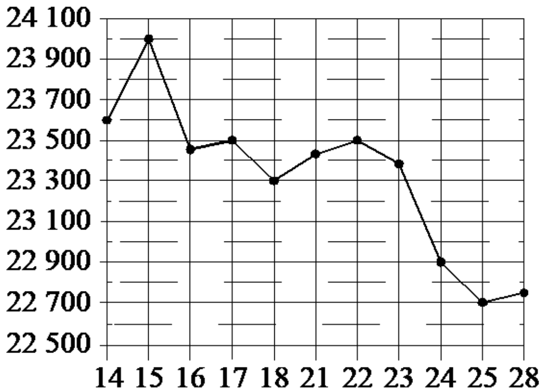
Комментарий

Высокая успешность выполнения задания обусловлена тем, что для получения верного ответа достаточно владеть читательской грамотностью и элементарными жизненными представлениями о величине (в данном случае о массе и длине).

Задание 3 – практико-ориентированная задача на чтение графиков, диаграмм.

Пример 1

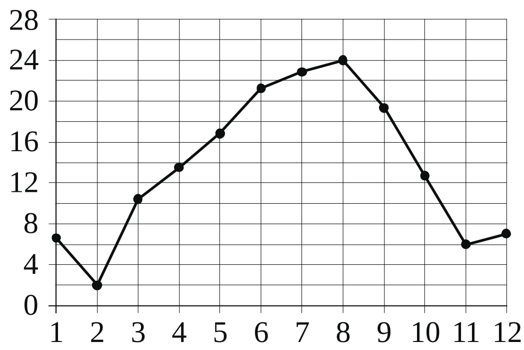
На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена олова в долларах США за тонну. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями.



Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наибольшей за данный период.

Пример 2

На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указаны номера месяцев, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями.



Определите по рисунку, в каком месяце среднемесячная температура в Сочи была наименьшей за данный период. В ответе запишите номер этого месяца.

Комментарий

Высокая успешность выполнения задания обусловлена тем, что для получения верного ответа достаточно владеть чтением графиков и диаграмм, применяемых в реальной жизни.

Задание 4 – текстовая задача на вычисление по формуле.

Пример 1

Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P = I^2 R$, где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите R (в омах), если $P = 180$ Вт и $I = 6$ А.

Пример 2

Второй закон Ньютона можно записать в виде $F = ma$, где F — сила (в ньютонах), действующая на тело, m — его масса (в килограммах), a — ускорение (в м/с ^{2}), с которым движется тело. Найдите m (в килограммах), если $F = 221$ Н и $a = 17$ м/с^2.

Комментарий

Задачу решили три четверти участников экзамена базового уровня.

Задание 5. Задача по теории вероятностей.

Пример 1

Из 500 мониторов, поступивших в продажу, в среднем 15 не работают. Какова вероятность того, что случайно выбранный монитор работает?

Пример 2

Фабрика выпускает сумки. В среднем из 150 сумок, поступивших в продажу, 3 сумки имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная сумка окажется без скрытого дефекта.

Комментарий

Задачу решили более половины участников экзамена базового уровня.

Задание 6 – текстовая задача практического содержания.

Пример 1
В городском парке работает 5 аттракционов: карусель, колесо обозрения, автодром, «Ромашка» и «Весёлый тир». В кассах продаётся 6 видов билетов, каждый из которых на один или на два аттракциона. Сведения о стоимости билетов представлены в таблице.

Номер билета	Набор аттракционов	Стоимость (руб.)
1	«Весёлый тир», автодром	550
2	«Ромашка», колесо обозрения	450
3	«Весёлый тир», «Ромашка»	300
4	Колесо обозрения, карусель	300
5	«Ромашка»	150
6	Карусель, автодром	200

Какие билеты должен купить Андрей, чтобы посетить все пять аттракционов и потратить не больше 900 рублей?
В ответе запишите какой-нибудь один набор номеров билетов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Пример 2
Путешественник из Москвы хочет посетить четыре города Золотого кольца России: Владимир, Ярославль, Суздаль и Ростов Великий. Турагентство предлагает маршруты с посещением некоторых городов Золотого кольца. Сведения о стоимости билетов и маршрутах представлены в таблице.

Номер маршрута	Посещаемые города	Стоимость (руб.)
1	Ярославль, Ростов Великий	2000
2	Суздаль	1650
3	Ярославль, Владимир	2350
4	Суздаль, Ярославль, Ростов Великий	3650
5	Владимир, Ростов Великий	2350
6	Владимир, Суздаль	2900

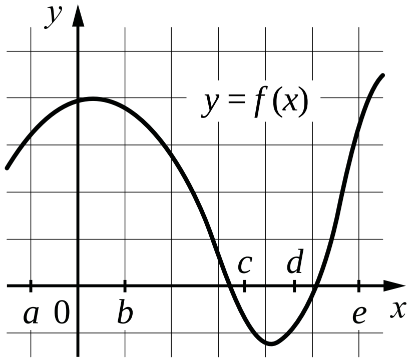
Какие маршруты должен выбрать путешественник, чтобы побывать во всех четырёх городах и потратить меньше 5000 рублей?
В ответе запишите какой-нибудь один набор маршрутов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Комментарий
Высокая успешность выполнения этого задания свидетельствует о том, что основная часть участников экзамена владеет умениями: извлекать необходимую информацию из текста задачи, табличных данных; строить математическую модель в виде числового выражения, выполняя вычисления с натуральными числами, находить его значение; проводить оценку полученного результата в соответствии с условием задачи.

Задание 7 – графическое представление процесса или функции.

Пример 1

На рисунке изображён график функции $y=f\left(x\right)$. Числа $a,\ b,\ c,\ d$ и e задают на оси Ox интервалы. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу характеристику функции.

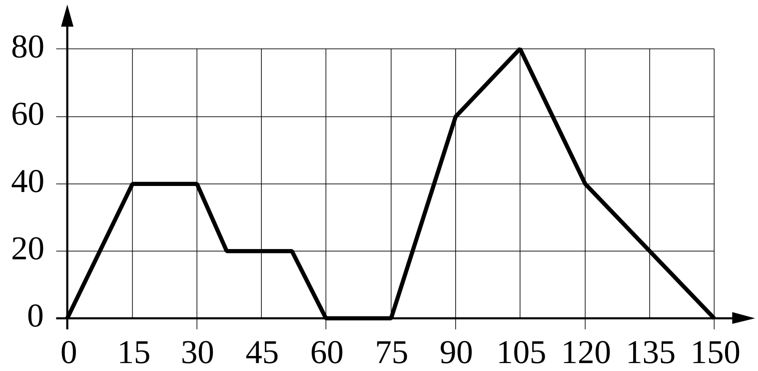


ИНТЕРВАЛЫ		ХАРАКТЕРИСТИКИ	
А)	$\left(a;b\right)$	1)	функция возрастает на интервале
Б)	$\left(b;c\right)$	2)	значение функции отрицательно в каждой точке интервала
В)	$\left(c;d\right)$	3)	функция убывает на интервале
Г)	$\left(d;e\right)$	4)	значение функции положительно в каждой точке интервала

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Пример 2

На графике изображена зависимость скорости движения легкового автомобиля от времени. На вертикальной оси отмечена скорость легкового автомобиля (в км/ч), на горизонтальной — время (в секундах), прошедшее с начала движения автомобиля.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику движения автомобиля на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ		ХАРАКТЕРИСТИКИ	
А)	0–30 с	1)	скорость достигла максимума за всё время движения автомобиля
Б)	30–60 с	2)	автомобиль сделал остановку на 15 секунд
В)	60–90 с	3)	скорость автомобиля не увеличивалась на всём интервале
Г)	90–120 с	4)	скорость автомобиля не уменьшалась и не превышала 40 км/ч

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Комментарий

Высокий процент выполнения данного задания означает, что у участников экзамена сформированы базовые умения извлекать необходимую информацию из текста и графика, проводить сравнения, находить закономерности, делать выводы, отвечать на вопрос задачи в соответствии с конкретной ситуацией практического содержания, описанной в тексте задания.

Задание 8 – логические высказывания.

Пример 1

В некоторый момент температура воздуха в Москве была равна $3\,^{\circ}\mathrm{C}$. В этот же момент в Архангельске было на $4\,^{\circ}\mathrm{C}$ холоднее, чем в Москве, а в Махачкале — на $3\,^{\circ}\mathrm{C}$ теплее, чем в Москве. Выберите все утверждения, которые были верны в этот момент при указанных условиях.

1) В любом городе, помимо указанных, в котором было теплее, чем в Махачкале, также было теплее, чем в Москве.
2) В любом городе, помимо указанных, в котором было теплее, чем в Архангельске, также было теплее, чем в Москве.
3) В Махачкале было теплее, чем в Архангельске.
4) В Москве было теплее, чем в Махачкале.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Пример 2

Кондитер испёк 50 рогаликов, из них 15 рогаликов он посыпал корицей, а 20 рогаликов посыпал сахаром (кондитер может посыпать один рогалик и корицей, и сахаром, а может вообще ничем не посыпать). Выберите все утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Найдётся 18 рогаликов, посыпанных и сахаром, и корицей.
2) Найдётся 10 рогаликов, которые ничем не посыпаны.
3) Не может оказаться больше 16 рогаликов, посыпанных и сахаром, и корицей.
4) Если рогалик посыпан сахаром, то он посыпан и корицей.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

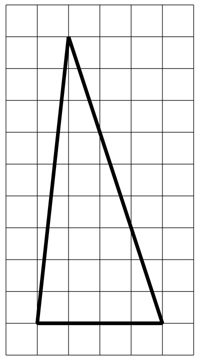
Комментарий

Это задача практического содержания, проверяющая умения работать с текстом, устанавливать логические связи между утверждениями, представленными в тексте задачи, рассуждать, строить логические умозаключения по условию задачи, устанавливать следственные связи между событиями в практической ситуации, отвечать на вопрос задачи, определяя истинность или ложность утверждений. Высокий процент выполнения данного задания означает, что базовые логические навыки есть почти у всех выпускников школы и при своевременном выявлении пробелов в знаниях, правильном построении курса математики многие участники, имеющие по результатам отметки 3 и 4, могут успешно решать алгебраические и геометрические задания и иметь более высокий результат освоения курса математики.

Задание 9 – планиметрия на клетчатом плане.

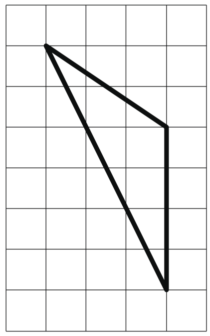
Пример 1

План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



Пример 2

План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



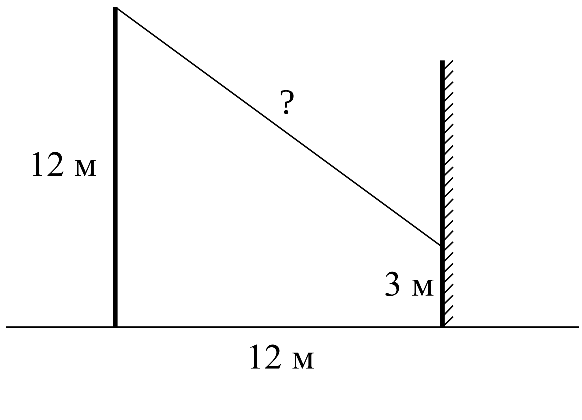
Комментарий

Задачу решило более половины участников экзамена базового уровня. Результаты выполнения показали, что планиметрическая задача практического содержания, проверяющая умения понимать жизненную ситуацию, описанную в условии задачи, выполнять действия с геометрическими фигурами, дополнительные построения на чертеже, строить математическую модель по условию задачи в виде числового выражения, используя свойства геометрических фигур, вызывает затруднения у участников экзамена.

Задание 10 – геометрическая задача практического содержания.

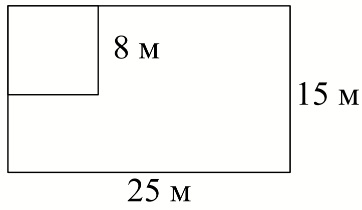
Пример 1

От столба высотой 12 м к дому натянут провод, который закреплён на стене дома на высоте 3 м от земли (см. рисунок). Расстояние от дома до столба 12 м. Найдите длину провода. Ответ дайте в метрах.



Пример 2

Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 25 метров и 15 метров. Хозяин планирует обнести его изгородью и отгородить такой же изгородью квадратный участок со стороной 8 метров (см. рисунок). Найдите суммарную длину изгороди в метрах.



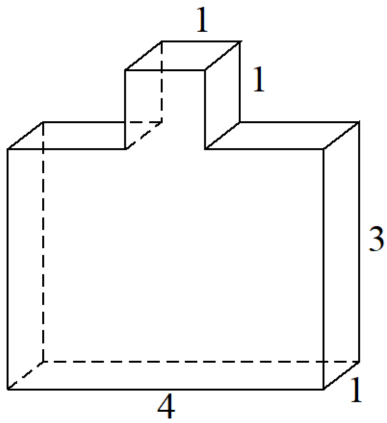
Комментарий

Задачу решили две трети участников экзамена базового уровня (в прошлом году 10 % даже не приступали к подобной задаче). Результаты выполнения показали, что планиметрическая задача практического содержания, проверяющая умения понимать жизненную ситуацию, описанную в условии задачи, выполнять действия с геометрическими фигурами, дополнительные построения на чертеже, строить математическую модель по условию задачи в виде числового выражения, используя свойства геометрических фигур, вызывает затруднения у участников экзамена.

Задание 11 – наглядная стереометрия.

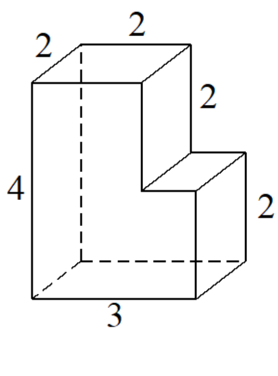
Пример 1

Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите площадь поверхности этой детали. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Пример 2

Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите объём этой детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах.



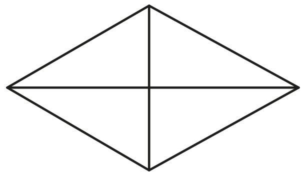
Комментарий

Только треть участников экзамена верно ответила на вопрос задачи, при этом пятая часть участников даже не приступала к решению. Из-за неразвитости пространственных представлений большое число участников экзамена не смогло «увидеть» грани поверхности многогранника или не смогло разбить многогранник на прямоугольные параллелепипеды.

Задание 12 – геометрическая задача (планиметрия).

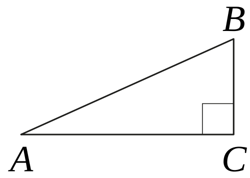
Пример 1

Сумма двух углов ромба равна $240°$, а его меньшая диагональ равна 14. Найдите периметр ромба.



Пример 2

В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 10$, $AC = \sqrt{91}$. Найдите $\sin A$.



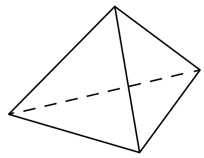
Комментарий

Задачу решило чуть меньше половины участников экзамена базового уровня, причем порядка 20 % даже не приступали к ее решению. Низкая выполняемость задания свидетельствует о несформированности умения решать планиметрические задачи на вычисление периметра ромба, проводя доказательные рассуждения, используя свойства ромба и прямоугольного треугольника, и решать прямоугольный треугольник.

Задание 13 – геометрическая задача (наглядная стереометрия).

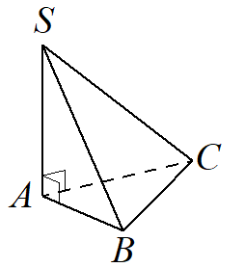
Пример 1

Стороны основания правильной треугольной пирамиды равны 10, а боковые рёбра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Пример 2

В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 6, а боковое ребро SA перпендикулярно основанию и равно $6\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды $SABC$.



Комментарий

Базовое задание по стереометрии выполняет заметно менее половины участников экзамена; это в сочетании с уровнем решения планиметрических задач показывает, что требуется существенная перестройка курсов стереометрии базового уровня, так как более половины школьников фактически не готовы к его освоению.

Задание 14 – вычисление значения выражения.

Пример 1

Найдите значение выражения $\frac{1}{3} \cdot 3{,}6 - 1.$

Пример 2

Найдите значение выражения $1 - \frac{1}{3} \cdot 1{,}2.$

Комментарий

Данное задание показывает, что более трети участников экзамена имеют недостаточно сформированные арифметические навыки и, как следствие, заведомо имеют сложности в освоении не только курса математики, но и курсов других естественных наук.

Задание 15 – текстовая задача на проценты.

Пример 1
Налог на доходы составляет 13 % заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 18 500 рублей. Какую сумму он получит после уплаты налога на доходы? Ответ дайте в рублях.

Пример 2
Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 10 %. Книга стоит 240 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

Комментарий

Задачу не решила треть участников экзамена базового уровня; это показывает, что развитию умений верно прочитать и понять условие текстовой задачи, составить математическую модель, решить полученную задачу и проверить ответ, к сожалению, недостаточно уделяется внимания в школе. Следует продолжать работу по переносу акцентов в изучении математики с формальных технических упражнений на развитие навыков математического мышления, умений применять математику при решении практических задач.

Задание 16 – вычисление значения логарифмического выражения.

Пример 1
Найдите значение выражения $\log_2 6,4+\log_2 5.$

Пример 2
Найдите значение выражения $\dfrac{\left(5^{-4}\right)^2}{5^{-10}}$.

Комментарий

Задачу решило около половины участников экзамена базового уровня.

Задание 17 – уравнение.

Пример 1
Найдите корень уравнения $\log_3(2x-5)=2.$

Пример 2
Найдите корень уравнения $2+9x=4x+3.$

Комментарий

Задачу решило около половины участников экзамена базового уровня. Низкая решаемость линейного уравнений свидетельствует о несформированности этого умения, что обязательно отражается и при решении других видов уравнений.

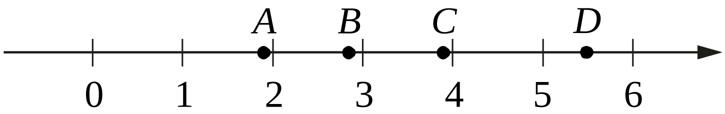
Задание 18

Пример 1
Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $2^{-x} > 2$	1) $x < 0$ или $x > 1$
Б) $\dfrac{1}{x(x-1)} > 0$	2) $0 < x < 1$
В) $\dfrac{x}{x-1} < 0$	3) $x < -1$
Г) $\log_2 x > 0$	4) $x > 1$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Пример 2
На координатной прямой отмечены точки A, B, C и D.



Каждой точке соответствует одно из чисел в правом столбце. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\sqrt{7}+2\sqrt{2}$
B	2) $\left(\sqrt{2}\right)^3$
C	3) $2\sqrt{7}-\sqrt{2}$
D	4) $\sqrt{7}:\sqrt{2}$

В таблице для каждой точки укажите номер соответствующего числа.

Комментарий

Задачу решила только четверть участников экзамена базового уровня. Низкая выполняемость задание обусловлена несформированностью умений выполнять действия с арифметическим квадратным корней и решать базовые неравенства.

Задание 19

Пример 1
Найдите пятизначное натуральное число, кратное 15, любые две соседние цифры которого отличаются на 2. В ответе запишите какое-нибудь одно такое число.

Пример 2
Найдите четырёхзначное число, кратное 15, произведение цифр которого больше 0, но меньше 25. В ответе запишите какое-нибудь одно такое число.

Комментарий

Существенно различается процент выполнения задания в разных вариантах. Данное задание выполняет от четверти до трёх четвертей участников.

Задание 20 – текстовая задача практического содержания на совместную работу или сплавы.

Пример 1
Имеется два сплава. Первый содержит 20 % никеля, второй — 50 % никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 45 % никеля. Масса первого сплава равна 10 кг. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго сплава?

Пример 2
Первый насос наполняет бак за 45 минут, второй — за 55 минут, а третий — за 1 час 6 минут. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

Комментарий

Задание выполняет седьмая часть участников экзамена. При этом треть участников даже не берется за решение данной задачи. Задание выполнило значительно меньше половины участников экзамена; это показывает, что развитию умений верно прочитать и понять условие текстовой задачи, составить математическую модель, решить полученную задачу и проверить ответ, к сожалению, в школе уделяется недостаточно внимания. Следует продолжать работу по переносу акцентов в изучении математики с формальных технических упражнений на развитие навыков математического мышления, умения применять математику при решении практических задач.

Задание 21 – целая арифметика. Рассуждения, перебор вариантов.

Пример 1
На ленте по разные стороны от середины отмечены тонкие поперечные полоски: синяя и красная. Если разрезать ленту по красной полоске, то одна часть будет на 25 см длиннее другой. Если разрезать ленту по синей полоске, то одна часть будет на 35 см длиннее другой. Найдите расстояние (в сантиметрах) между красной и синей полосками.

Пример 2
На поверхности глобуса фломастером проведены 15 параллелей и 20 меридианов. На сколько частей проведённые линии разделили поверхность глобуса?
Меридиан — это дуга окружности, соединяющая Северный и Южный полюсы. Параллель — это окружность, лежащая в плоскости, параллельной плоскости экватора.

Комментарий

Задание выполняет пятая часть участников. Низкий процент выполнения данного задания показывает, что часть выпускников, выбравших экзамен базового уровня, обладает неплохой базовой логической культурой, умением анализа условия задачи и потенциально способна освоить на неплохом уровне курс математики и на повышенном уровне.

Базовый экзамен не предназначен для тонкого различения степени овладения математическими умениями. Это отражается в первую очередь в четырехбалльной системе тестовых баллов – от 2 до 5. Собственно, эта шкала и определяет естественную кластеризацию участников экзамена. Процентный состав групп участников базового экзамена представлен в табл. 3.

Табл. 3. Процентный состав групп участников базового экзамена, 2019, 2022, 2023 гг.

Год	Средний тестовый балл	Тестовый балл			
		2	3	4	5
2023	4,01	4,6 %	21,7 %	41,9 %	31,8 %
2022	4,16	3,75 %	16,89 %	39,14 %	40,22 %
2019	4,13	4,24 %	17,25 %	39,69 %	38,82 %

Группа 1 (тестовый балл – 2) – это участники с наиболее низким уровнем математической подготовки, не обладающих приемлемыми навыками счета и чтения. Доля участников базового экзамена – 4,6 %.

Группа 2 (тестовый балл – 3) – участники с низким уровнем математической подготовки. Они, как правило, выполняют задания, требующие прямого подсчета. За задания, требующие знания элементов содержания 10–11 класса, часто не берутся. Доля – 21,7 %.

Группа 3 (тестовый балл – 4) имеет базовые математические знания, нужные в бытовых расчетах, жизненных ситуациях. Слабое выполнение последних заданий КИМ, требующих логических построений, знания функций, изученных в старших классах, компенсируется устойчивыми вычислительными навыками и решением базовых текстовых задач. Доля – 41,9 %.

Группа 4 (тестовый балл – 5) – наиболее подготовленные участники базового экзамена. Участники из этой группы при небольшой дополнительной подготовке в рамках итогового повторения могут успешно сдать экзамен профильного уровня на балл, достаточный для поступления и успешной учебы в массовых вузах по IT, экономическим и инженерным специальностям. Их выбор базового экзамена в основном осознанный: они планируют продолжение образования в областях, не связанных с математикой. Однако не исключено, что заметная часть этой группы состоит из участников, которые выбрали базовый экзамен либо по собственной ошибке, либо будучи неверно сориентированными в части выбора дальнейшей траектории продолжения образования. С потенциальными участниками из данной группы следует вести профориентационную работу не только учителям, но и вузам, особенно региональным. Заметный объем данной группы показывает высокий потенциал роста числа абитуриентов технических вузов. Доля – 31,8 %.

В таблице 4 показано распределение процентов выполнения заданий по группам. Проценты округлены до десятых долей.

Табл. 4. Выполнение заданий по группам, проценты (базовый уровень)

Задание / балл	Средний процент выполнения	Группа 1, 0–6 ПБ	Группа 2, 7–11 ПБ	Группа 3, 12–16 ПБ	Группа 4, 17–21 ПБ
1 / 1	89,6	47,4	81,3	92,5	97,6
2 / 1	95,2	77,1	92,5	96,1	98,4
3 / 1	96,1	72,5	93,8	97,5	99,2
4 / 1	85,9	15,2	67,5	93,0	99,0
5 / 1	76,9	15,1	49,6	82,6	97,0
6 / 1	93,5	69,8	89,0	94,8	98,3
7 / 1	89,8	38,1	78,9	94,1	99,0
8 / 1	88,8	43,1	80,1	91,5	97,6
9 / 1	76,7	13,9	49,6	82,2	96,7
10 / 1	72,7	12,1	42,9	76,6	96,5

Задание / балл	**Средний процент выполнения**	**Группа 1, 0–6 ПБ**	**Группа 2, 7–11 ПБ**	**Группа 3, 12–16 ПБ**	**Группа 4, 17–21 ПБ**
11 / 1	46,0	1,7	12,3	40,5	82,5
12 / 1	53,4	2,5	15,5	50,1	90,6
13 / 1	38,5	1,6	7,0	30,1	76,2
14 / 1	70,1	11,6	38,1	74,3	94,6
15 / 1	81,9	12,0	58,0	89,4	98,4
16 / 1	65,6	9,1	30,7	67,6	94,8
17 / 1	62,6	5,7	25,9	63,8	94,1
18 / 1	33,0	5,9	9,3	22,0	67,7
19 / 1	45,4	2,5	14,4	40,1	79,5
20 / 1	19,9	1,3	3,1	8,7	48,6
21 / 1	29,4	5,2	8,4	20,3	59,3

Группа 1 имеет явные особенности в выполнении отдельных заданий. Участники экзамена из этой группы не справляются с геометрическими заданиями (задания 11–13), с решением тестовой задачи на вычисление и преобразование (задание 19), с заданием на исследование простейших математических моделей на конструирование числа (задание 20). Группа 1 хорошо справляется только с задачей на чтение графиков и диаграмм (задание 3) и задачей на построение и исследование простейшей математической модели для практической ситуации (задание 6). Можно сделать вывод о том, что значительная часть участников, получивших тестовый балл 2, незнакома с математическими фактами курса средней школы.

Группа 2, в целом испытывая те же трудности, что и группа 1, все же выполняет большую часть задач на уровне выше 40 %. Наиболее низкие результаты – опять же по геометрии. Другие массовые особенности при анализе агрегированной статистики и вееров ответов не выявлены.

В группе 3 «провалы» в геометрии также имеются. И даже в группе 4 задание 13 (наглядная стереометрия) вызывает определенные трудности.

Выделим наиболее значимые направления работы с каждой группой обучающихся, исходя из их уровня подготовки и типичных проблем, которые необходимо компенсировать.

Группа 1. Эту группу можно кратко охарактеризовать как выпускников, имеющих слабую математическую подготовку, в том числе плохо умеющих считать. Безусловно, внимание учителя и родителей должно быть направлено в первую очередь на развитие устойчивых навыков бытового счета, умения находить часть от числа и число по его части. Вряд ли есть смысл глубоко изучать с такими детьми в старшей школе тригонометрические и другие функции: их основная проблема – полное отсутствие базовой арифметической подготовки. Участники из данной группы, как правило, имели очень низкие результаты на ОГЭ. Необходимо своевременно (не позднее чем в начале учебного года, а желательно в 10 классе) выявлять учеников, потенциально входящих в такую группу, и организовывать индивидуализированную подготовку, в том числе по ликвидации пробелов начальной и основной школы. Школам, в которых высока доля участников из данной группы, следует обратить особое внимание на качество математического образования в 5–6 классах и начальной школе.

В отношении групп 2 и 3 заметим, что, помимо слабого решения геометрических задач, эти участники ЕГЭ не имеют серьезных «провалов». Недостаточная отработка вычислительных навыков и невнимательность при чтении условия – основные проблемы этой группы участников. Здесь также следует добиваться отработки уже имеющихся навыков, прежде чем браться за более сложные умения или новые объекты. Вместе с тем важно обратить внимание на решение типовых задач по геометрии, не отказываться от изучения геометрии ради алгебры. Но вместо рассмотрения теорем и решения абстрактных задач лучше сосредоточиться на простых практико-ориентированных задачах, в которых фигурирует объем цилиндра, наглядное деление фигуры на две части, видимое подобие, используются простые планы и чертежи на клетчатой бумаге.

Группа 3 наиболее массовая. Учитель обычно хорошо умеет работать именно с такими школьниками. Повторив все рекомендации, актуальные для группы 2, отметим, что здесь учитель может опираться на имеющие вычислительные навыки, следовательно, нужно давать больше задач на оценку и прикидку, на сопоставление результата со здравым смыслом и жизненным опытом при решении не только практико-ориентированных, но и типовых задач школьной геометрии и алгебры.

Несмотря на наличествующие вычислительные навыки обучающиеся с сопоставимой с группой 3 подготовкой испытывают некоторый дефицит опыта в преобразовании логарифмов, корней и степеней. Следовательно, при подготовке к ЕГЭ целесообразно чаще использовать несложные преобразования функций в тренировочных материалах с целью выработать навык с помощью многократного повторения.

Группа 4 – пограничная между базовым и профильным экзаменами. Вероятно, значительная часть участников экзамена, попавших в эту группу, в состоянии успешно сдать профильный экзамен. Учителю важно понимать, насколько разумен выбор базового экзамена для потенциально сильного ученика, вести соответствующую профориентационную работу вместе с региональными вузами.

Для выработки конкретных рекомендаций был проведен анализ типичных ошибок участников ЕГЭ по математике базового уровня.

В группу заданий, с которыми участники экзамена справились несколько хуже, чем с другими, но на достаточно высоком уровне, вошли как задания, тематически относящиеся к курсу математики старшей школы, так и задания, «перешедшие» из основной школы: нахождение значения числового выражения; преобразование степенного выражения; решение практической задачи «с процентами»; решение квадратного уравнения; решение планиметрической задачи; решение вероятностной задачи на работу с информацией, представленной в таблице; решение планиметрической задачи; решение стереометрической задачи на объем круглого тела, на задание с числовыми неравенствами, на задание с числами.

Изменение структуры КИМ базового уровня незначительно, поэтому можно считать, что данные по годам сравнимы. Можно отметить, что в целом результаты меняются год от года не очень существенно, и констатировать стабильность в уровне математической подготовки школьников.

Анализ результатов ЕГЭ 2023 г. по математике позволяет сформулировать некоторые рекомендации учителям по совершенствованию процесса преподавания математики:

– обратить особое внимание на усиление системности и систематичности изучения учебного материала, что может быть достигнуто в результате постепенного накопления и последовательного усложнения изученного материала, периодически проводимого закрепления уже изученного;

– применять различные виды контроля знаний на уроках и во внеурочной деятельности;

– уделять в работе с обучающимися особое внимание организационной и психологической составляющей подготовки к экзамену, контролю времени и применению простых приемов самоконтроля, формировать умение длительного занятия математикой (экзамен профильного уровня продолжается практически 4 часа, а базового – 3 часа).

Наименее эффективным способом подготовки является прорешивание типовых вариантов ЕГЭ. Решение полных типовых вариантов следует проводить не чаще одного раза в месяц. Часть времени следует посвящать выполнению индивидуально подобранных тренингов по темам, которые вызывают затруднение у конкретных обучающихся.

В процессе обучения необходимо развивать самостоятельность мышления учащихся, использовать методы проблемного обучения, включать в работу на уроках и во внеурочной деятельности задания, которые направлены не на воспроизведение знаний, не на воспроизведение изученного алгоритма, не на тренировку памяти, а на формирование творческих способностей обучающихся, их способности мыслить, рассуждать, использовать и развивать свой интеллектуальный потенциал. Нужно сформировать у обучающихся в процессе подготовки к экзамену умения анализировать условие задания, извлекать из него информацию, сопоставлять приведенные в условии данные, а также систематически отрабатывать умения поиска и переработки информации, представленной в различной форме (текст, таблица, схема), проводить ее анализ и синтез, сравнение и классификацию. Необходимо повышать уровень вычислительных умений, читать условие и вопрос задачи, записывать математически грамотно решение задачи. Особое внимание следует уделять формированию навыков самоконтроля и самопроверки выполненных заданий.

Более подробно остановимся на некоторых заданиях, результаты выполнения которых выявляют типичные методические или предметные недостатки подготовки участников ЕГЭ. Попробуем сформулировать рекомендации и наметить пути преодоления затруднений, возникающих у школьников при решении этих задач.

По-прежнему одной из самых типичных ошибок на экзамене является неверно прочитанное условие задачи. Следует уделять особое внимание развитию навыка понимания условия, умения перевести его на математический язык. Также важно отметить, что в условии задачи (не только экзаменационной!) важна каждая деталь. К сожалению, заметное число участников экзамена, увидев задачу, похожую на ту, которую они уже решали, или, например, на задачу демонстрационного варианта, не обращают внимания на некоторые небольшие различия, что приводит к решению, по сути, другой задачи и оценке в ноль баллов.

В последние годы мы наблюдаем четкую тенденцию роста выполнения большей части экзаменационных заданий. Особенно радует рост выполнения геометрических заданий и заданий по вероятности и статистике. При этом, к сожалению, зафиксирован наибольший рост в заданиях, в которых требуется прямое применение изученных алгоритмов. Как только в задании требуется проявить, даже на минимальном уровне, умение провести поиск подхода к решению, наблюдается снижение процента выполнения. Особенно заметно это в задании 18 ЕГЭ 2023 г., в разнице в решении геометрических заданий частей 1 и 2, в разнице в выполнении заданий вычислительных алгебраических заданий и графических заданий на свойства функций.

Это означает, что, к сожалению, при обучении математике в школе больше всего времени уделяется отработке технических навыков, решению заданий по заданным алгоритмам. Разумеется, при обучении арифметическим действиям в начальной школе большое внимание должно уделяться тренировки счета. Но, даже в начальной школе, больше внимания надо уделять развитию логического мышления, геометрических представлений, чувства числа не только путем рутинных вычислительных упражнений.

А уже тем более в основной и старшей школе, в век развития искусственного интеллекта, чтобы быть конкурентоспособным, успешно изучать физику, информатику, биологию, другие предметы, иметь хорошие карьерные перспективы, школьник должен получать больше возможностей для развития умения найти путь решения, составить математическую модель, а технические действия выполнять, грамотно применяя вычислительные устройства. Имея, разумеется, представление о сложении и умножении столбиком, выпускник не должен тратить время на оттачивание важного ранее, но ненужного в настоящее время и в будущем ни в жизни, ни в современных профессиях отточенного навыка, скажем, сложения столбиком пятизначных чисел.

Школьники, учителя которых больше времени тратят на решение задач, требующих именно анализа условия, а не подбора типового алгоритма, получают лучшие результаты на экзамене, оказываются более успешными в вузе.

Акценты нового ФГОС и ФОП позволят школам успешно обновить преподавание математики, повысить качество математической подготовки как будущих абитуриентов вузов, так и тех, кто не планирует поступать в вуз, ведь в реальной жизни, также важно не столько умения вычислять самостоятельно, сколько умения анализировать условие, задавать вопросы и отвечать на них, принимать правильные решения.

Рассмотрим две задачи из вариантов ЕГЭ.

1. Центральный угол на $29°$ больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол.
2. Отрезки AC и BD – диаметры окружности с центром в точке O. Угол ACB равен $41°$. Найдите угол AOD.

Казалось бы, вторая задача намного сложнее первой. Однако субъективная сложность второй задачи оказалась ниже. Многим школьникам выполнять последовательные вычисления на основе некоторого факта проще, чем просто напрямую применить этот факт. При решении второй задачи последовательность действий такова: $\angle AOB = 2 \cdot 41° = 82°$, $\angle AOD = 180° - 82° = 98°$.

Решение первой задачи сводится к тому, что, если центральный угол вдвое больше вписанного, значит, вписанный равен как раз $29°$. И вот эта мыслительная фигура оказывается сложнее последовательности двух вычислений. Здесь на помощь традиционно приходит алгебра. Если вписанный угол равен x, то центральный равен $2x$, а их разность $2x - x = 29°$, откуда $x = 29°$. Эта задача является прекрасным способом показать, что уравнения полезны при решении не только сложных, но и простых задач. Школьников приучают к мысли, что уравнения помогают решать сложные задачи. Ассоциация со сложностями отпугивает. Регулярное использование уравнений (не спорим, приведенное решение не является самым рациональным, но за рациональностью мы сейчас не гонимся) в простейших случаях помогает понять саму суть появления математической модели. Проблема еще и в том, что мы традиционно используем не очень удачные слова «переменная» и «неизвестное». Представим, что x – это не неизвестное, а известное число. И тогда мы можем обращаться с x, как с любым другим числом. Часто этот подход позволяет школьникам преодолеть боязнь перед введением в задачу числа x. Этот прием должен стать обычным и естественным для любого школьника: «если мы не знаем какое-то число, то попробуем назвать его x и будем обращаться с ним, как будто это число известно».

Важным метапредметным умением, которое развивается на уроках математики, является представление о масштабе, об изменении геометрических величин при пропорциональном изменении размеров фигуры. В учебниках геометрии есть теорема о том, что отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Доказательство этой теоремы обычно опирается на вспомогательную теорему об отношении площадей треугольников, имеющих одинаковый угол. В результате школьники плохо понимают последовательность рассуждений и общность самого факта.

Изучение вопроса лучше всего начинать на клетчатой бумаге, нарисовав квадратик со стороной 1, квадратик со стороной 2 и квадратик со стороной 3. Очевидно, что площади их равны 1, 4 и 9, то есть площади относятся как квадраты линейных размеров. Это прослеживается в самом наименовании единиц площади: квадратные сантиметры или квадратные метры. Аналогично, используя, например, кубик Рубика, легко заметить, что объемы относятся как кубы линейных размеров.

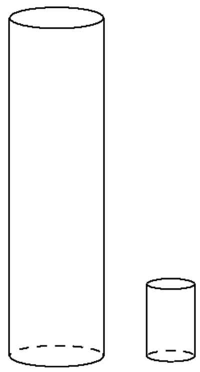
Лучше всего принести на урок две модели похожих автомобилей или две разные по размеру мягкие игрушки (кошки, собаки, слоны) и обсудить, во сколько раз площадь поверхности (количество материала, нужного для пошива) первого слона больше или меньше площади поверхности второго, во сколько раз второй тяжелее или легче первого. При этом достаточно линейки или гибкого швейного метра для измерения только высоты фигурки или только ее длины.

Таким образом, следует развить представление об отношении площадей и объемов подобных фигур на плоскости и в пространстве и только потом можно это *формализовать*, доказав соответствующую теорему.

Более общий факт состоит в следующем: при сжатии или растяжении в одном направлении площадь (объем) фигуры изменяется во столько раз, во сколько раз фигуру сжали или растянули. Это представление крайне наглядно. Оно также иллюстрируется на клетчатой бумаге или с помощью кубиков. Тогда решение задач на отношение объемов, которые обычно встречаются в базовом и профильном ЕГЭ, не вызывают трудностей.

Пример

Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого цилиндра равны соответственно 4 и 18, а второго — 2 и 3. Во сколько раз площадь боковой поверхности первого цилиндра больше площади боковой поверхности второго цилиндра?



Решение. Будем мысленно превращать первый цилиндр во второй. Нужно сжать цилиндр в 2 раза со всех сторон (по длине, ширине и высоте). Получится цилиндр радиусом 2 и высотой 9. Площадь поверхности при этом уменьшится в 4 раза. Теперь нужно полученный цилиндр сжать еще раз, но только сверху вниз в 3 раза, чтобы высота уменьшилась с 9 до 3. Площадь уменьшится еще в 3 раза, то есть всего площадь уменьшилась в 12 раз.

Такое решение можно также перепроверить на черновике соответствующими выкладками, используя известные формулы:

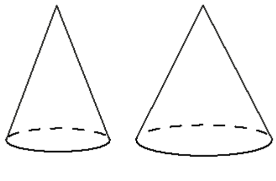
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi\cdot 4\cdot 18}{2\pi\cdot 2\cdot 3}=2\cdot 6=12\,.$$

Преимущество первого способа, помимо того, что он нагляден, еще и в универсальности. В самом деле, неважно, что именно мы сжимаем или растягиваем – цилиндры, конусы, призмы или пирамиды. Поэтому неважны формулы площадей или объемов. Школьник должен знать, что для решения таких задач не обязательно даже знать формулы, – больше нужно полагаться на интуицию, рисунок и здравый смысл.

Отметим, что в таких рассуждениях очень важно внимательно отслеживать, какие параметры пропорционально изменяются. Например, если увеличивается вдвое ширина прямоугольника при неизменной высоте, то площадь увеличивается вдвое. А если вдвое увеличивается сторона квадрата, то площадь увеличивается в 4 раза.

Закрепить понимание данной темы, можно, например, решив следующую задачу.

Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны соответственно 4 и 7, а второго — 6 и 7. Во сколько раз площадь боковой поверхности второго конуса больше площади боковой поверхности первого конуса?



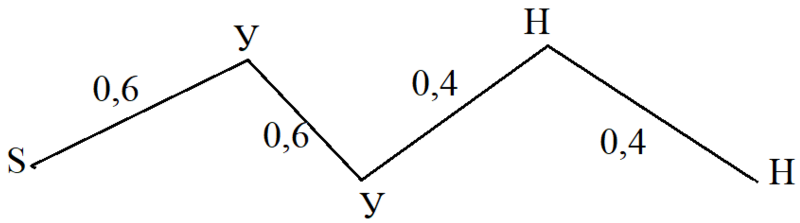
В заключение отметим, что подобные задачи как раз являются хорошим материалом и для развития навыка устного счета. Не нужно, повторим, стремиться сильно разнообразить числовые данные. Пусть школьники *привыкнут* к наиболее распространенным случаям – увеличение или уменьшение в 2 или 3 раза.

Остановимся на некоторое время на задачах по теории вероятностей, которые в этом году заняли позицию 4 в вариантах. Наряду с использованием формул большинство из них удобно решить графическим методом – с помощью дерева или цепи. Вообще, изображение случайного опыта по условию задачи в виде дерева – универсальный и очень удобный способ решения самых различных задач. Более того, изучение данного метода позволит глубже разобраться в сути вероятностных моделей, позволит избежать ошибок, связанных с непродуманным, формальным применением формул.

Пример 1

> Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в две первые мишени и не попадёт в две последние.

Решение. В данном случае дерево тривиально сводится к одной цепи, поскольку нас интересует только одно элементарное событие – два успеха и две неудачи подряд. Ненужные ветви дерева можно не изображать.



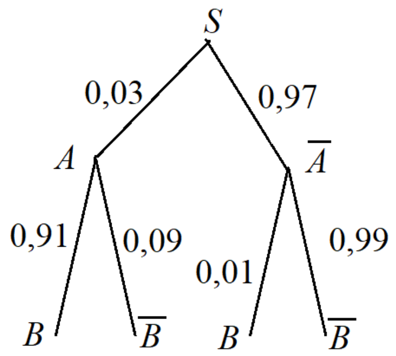
Каждая подписанная около ребер вероятность условная. Поскольку по условию задачи вероятности не меняются с течением времени и не зависят от предыдущих результатов стрельбы, две первые вероятности попадания (успеха) равны 0,6, а вероятности двух последующих промахов равны 0,4. Пользуясь правилом умножения, получаем:

$$0,6\cdot 0,6\cdot 0,4\cdot 0,4=0,0576.$$

Пример 2

> Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,91. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение. Здесь лучше изобразить полное дерево, в котором отражены события A «батарейка неисправна» и B «батарейка забракована системой контроля», что не одно и то же. Дерево получается такое, как на рисунке ниже.



Искомая вероятность складывается из вероятностей цепей SAB и $S\bar{A}B$:

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(SAB)+\mathrm{P}(S\bar{A}B)=0,03\cdot 0,91+0,97\cdot 0,01=0,037.$$

Этот метод исследования дерева универсален. Попутно школьникам полезно сообщить, что формула, которая получается в результате сложения вероятностей цепочек, называется формулой полной вероятности.

В КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня в 2024 г. включена отдельная задача на проверку умения работать с векторами. Важно отметить, что акцент на данную тему позволит не только получить балл на экзамене за верное решение данного задания, но и успешно применить векторный аппарат в других задания ЕГЭ по математике и ЕГЭ по физике. Очень обидно видеть, как трудно и тяжело школьники решают задачи, которые можно было бы решить очень кратко, применяя соответствующий аппарат. Так наряду с геометрическими методами в ряде задач удобно применять аналитические методы. Например, в такой задаче.

> В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середину M диагонали AC_1 проведена плоскость α перпендикулярно этой диагонали, $AB=5,\ BC=3,\ AA_1=4.$
>
> а) Докажите, что плоскость α содержит точку D_1.
>
> б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит ребро A_1B_1.

Доказательство. Введем базис $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$. Длины базисных векторов известны: 5, 3 и 4 соответственно. Чтобы решить п. а), достаточно показать, что вектор $\overrightarrow{MD_1}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{AC_1}$:

$$\overrightarrow{MD_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right).$$

Поскольку попарные произведения базисных векторов равны нулю, следовательно,

$$\overrightarrow{MD_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}^2=\frac{1}{2}(-25+16+9)=0.$$

Для решения п. б) достаточно найти точку T на ребре A_1B_1 такую, что $\overrightarrow{MT}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0$:

$$\left(\overrightarrow{MA_1}+t\overrightarrow{A_1B_1}\right)\cdot\overrightarrow{AC_1}=0, \text{ где } 0\le t\le 1.$$

Тогда

$$\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+t\overrightarrow{A_1B_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)=0;$$

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot 25-\frac{1}{2}\cdot 16+\frac{1}{2}\cdot 9=0;\ 25t-16=0;\ t=\frac{16}{25}.$$

Значит, точка T делит ребро A_1B_1 в отношении $16:9$, считая от точки A_1.

Изучение векторов в школе по большинству учебников, к сожалению, недостаточно. Изученные действия над векторами остаются без применения. А ведь если речь идет о прямоугольном параллелепипеде, правильной четырехугольной пирамиде или любой другой фигуре на плоскости или в пространстве, где удобным и естественным образом вводятся базисные векторы, связанные с самой фигурой, то в ряде задач удобно применять векторный метод. Отметим, что в обновленном ФГОС и ФОП усилен акцент на векторный метод в геометрии, а также уделено внимание пропедевтическому изучению основ линейной алгебры.

Прошедший экзамен профильного уровня показал успешность реализации модели 2023 г. Изменения, связанные с тематической группировкой заданий в КИМ, позволили участникам экзамена более эффективно организовать работу как при итоговом повторении, так и на самом экзамене. В 2024 г. планируется добавление геометрической задачи с кратким ответом базового уровня, проверяющего умение работать с векторами.

Прошедший экзамен базового уровня показал успешность реализации модели 2023 г. В 2024 г. не планируется внесение изменений.

Методическую помощь учителям и обучающимся при подготовке к ЕГЭ могут оказать материалы с сайта ФИПИ (www.fipi.ru):

- документы, определяющие структуру и содержание КИМ ЕГЭ 2024 г.;
- открытый банк заданий ЕГЭ;
- Навигатор самостоятельной подготовки к ЕГЭ (fipi.ru);
- Учебно-методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ;
- Методические рекомендации на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ прошлых лет (2015–2022 гг.);
- Методические рекомендации для учителей по преподаванию учебных предметов в образовательных организациях с высокой долей обучающихся с рисками учебной неуспешности. Математика;
- журнал «Педагогические измерения»;
- Youtube-канал Рособрнадзора (видеоконсультации по подготовке к ЕГЭ 2016–2023 гг.).

Приложение 1

Основные характеристики экзаменационной работы ЕГЭ 2023 г. по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень)

Анализ надежности экзаменационных вариантов по математике (профильный уровень) подтверждает, что качество разработанных КИМ соответствует требованиям, предъявляемым к стандартизированным тестам учебных достижений. Средняя надежность (коэффициент альфа Кронбаха)КИМ по математике (профильный уровень) – 0,82.

Номер задания	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований (умений)	Коды проверяемых элементов содержания	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Средний процент выполнения
1	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 5.2	5.1, 5.5	Б	1	78,7
2	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.2	5.2–5.5	Б	1	71,5
3	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.4	6.3	Б	1	92,7
4	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	5.4	6.3	П	1	69,1
5	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1	2.1	Б	1	96,7
6	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1–1.3	1.1–1.4	Б	1	78,9
7	Уметь выполнять действия с функциями	3.1–3.3	4.1–4.3	Б	1	74,7
8	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1–6.3	2.1, 2.2	П	1	72,1
9	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1	2.1, 2.2	П	1	71,1
10	Уметь выполнять действия с функциями	3.1, 5.1	2.1, 2.2, 3.1–3.3	П	1	71,6
11	Уметь выполнять действия с функциями	3.1–3.3	4.1, 4.2	П	1	62,5
12	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3	2.1, 2.2	П	2	44,0
13	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.2, 4.3, 5.2, 5.3	5.2–5.6	П	3	2,1

Номер задания	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований (умений)	Коды проверяемых элементов содержания	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Средний процент выполнения
14	Уметь решать уравнения и неравенства	2.3	2.1, 2.2	П	2	17,8
15	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1, 6.3	1.1, 2.1.12	П	2	10,6
16	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 4.3, 5.2, 5.3	5.1, 5.5	П	3	3,2
17	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3, 5.1	2.1, 2.2, 3.1–3.3	В	4	6,7
18	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1, 5.3	1.1–1.4, 2.1, 2.2, 3.1–3.3	В	4	15,5

Приложение 2

Основные характеристики экзаменационной работы ЕГЭ 2023 г. по МАТЕМАТИКЕ (базовый уровень)

Анализ надежности экзаменационных вариантов по математике (базовый уровень) подтверждает, что качество разработанных КИМ соответствует требованиям, предъявляемым к стандартизированным тестам учебных достижений. Средняя надежность (коэффициент альфа Кронбаха) КИМ по математике (базовый уровень) – 0,83.

Номер задания	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований (умений)	Коды проверяемых элементов содержания	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Средний процент выполнения
1	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1–1.3	1.4.3–1.4.5	Б	1	89,6
2	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1	2.1.12, 6.3.1	Б	1	95,2
3	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.2, 3.1	6.2.1, 3.1.3	Б	1	96,1
4	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.2, 3.1	6.2.1, 3.1.3	Б	1	85,9
5	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.4	6.3.1	Б	1	76,9
6	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1, 6.1, 6.2	1.4.1	Б	1	93,5
7	Уметь выполнять действия с функциями	3.3, 6.2, 6.3	3.1.1–3.1.3, 3.2.1, 3.2.5, 3.2.6, 4.1.1, 4.1.2, 6.2.1	Б	1	89,8
8	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.3	2.1.12	Б	1	88,8
9	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	4.2	5.1.1–5.1.7, 5.5.1–5.5.5	Б	1	76,7
10	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	4.1, 5.2	5.1.1–5.1.3 5.5.1, 5.5.3 5.5.5	Б	1	72,7

Номер задания	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований (умений)	Коды проверяемых элементов содержания	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Средний процент выполнения
11	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	4.2, 5.2	5.3.1–5.3.5, 5.4.1–5.4.3, 5.5.5–5.5.7	Б	1	46,0
12	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	4.1	5.1.1–5.1.5, 5.5.1, 5.5.3, 5.5.5	Б	1	53,4
13	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	4.2	5.3.1–5.3.3, 5.4.1–5.4.3, 5.5.5–5.5.7	Б	1	38,5
14	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1	1.1.1, 1.1.3, 1.4.1	Б	1	70,1
15	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.3	1.1.3	Б	1	81,9
16	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1–1.3	1.1–1.4	Б	1	65,6
17	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1	2.1.1–2.1.6	Б	1	62,6
18	Уметь решать уравнения и неравенства	2.3, 6.1	2.2.1–2.2.5	Б	1	33,0
19	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1	1.4.1, 1.4.2	Б	1	45,4
20	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1, 2.1–2.3	1.4.1, 1.4.2, 2.1	Б	1	19,9
21	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1	1.4.1, 1.4.2, 2.1, 2.2	Б	1	29,4